Part I

Model de teorie de camp pentru fluide $2D$ fara scala spatiala intrinseca

Dinamica in doua dimensiuni a fluidelor cuasi-ideale indica tendinta de auto-organizare. Curgerea ce este initializata intr-o forma neregulata ajunge in timp sa se ordoneze intr-un grad inalt si in starea asimptotica fluidul prezinta o forma de curgere coerenta stationara. Masura acestei stari ordonate este data de variabilele esentiale: functia de curgere (streamfunction), campul de viteze, vorticitatea. Inainte de orice elaborata explicatie, se pot formula doua intrebari: cum se poate obtine certitudinea ca starea asimptotica este esentialmente ordonata; si, care este substratul tendintei spre ordine. Raspunsurile sunt aproximative dar sunt sugestive. Pentru a identifica starea asimptotica, in afara existentei unui numar indefinit de cumulanti (corelatii ireductibile), specific formarii structurilor, se obtine si rezultatul ca functia de curgere verifica o ecuatie de o insemnatate speciala: sinh-Poisson. In ceea ce priveste substratul evolutiei spre ordine, daca este satisfacator un limbaj specific turbulentei, atunci cascada inversa in spectrul energetic trebuie vazuta ca sursa a oricarui posibil model explicativ. Cascada inversa a energiei si cascada directa a enstrofiei sunt rezultate clasice ale teoriei turbulentei bi-dimensionale.

Dar tendinta spre ordine are si alte faze decat acelea in care conceptele legate de turbulenta pot sa ofere o descriere acceptabila. Starea tarzie, premergatoare ordinii finale, consta dintr-un numar mic de vortexuri mezoscopice care se deplaseaza in plan cu o viteza redusa si care se pot intalni si forma prin coalescenta vortexuri de scala si mai mare. Aceasta faza nu mai poate fi descrisa cu notiunile de care se serveste teoria turbulentei. De regula, aceasta faza este studiata experimental sau prin simulare numerica.

1 Starile asimptotice ale fluidului Euler in doua dimensiuni

Structura matematica a descrierii clasice a fluidului ideal incompresibil in doua dimensiuni (pe care il vom numi pe scurt “fluidul Euler $2D$”) se bazeaza pe trei functii: $(\psi, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$. Functia de curent este un camp scalar $\psi(x,y,t)$ din care se deduce campul vectorial al vitezei $\mathbf{v}(x,y,t)$: din incompresibilitate $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$, se deduce forma generala a lui $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\chi - \boldsymbol{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z$ unde χ este o functie armonica, $\Delta\chi = 0$, $\widehat{\mathbf{e}}_z$ este versorul perpendicular pe planul miscarii iar operatorii $\boldsymbol{\nabla}$ si Δ sunt restrictionati la $2D$. Aplicand operatorul rotational se obtine vorticitatea $\omega\widehat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{v} = \Delta\psi\widehat{\mathbf{e}}_z$ iar ecuatia Euler se scrie

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \left[\left(-\mathbf{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z\right) \cdot \mathbf{\nabla}\right]\Delta\psi = 0 \tag{1}$$

Campul vectorial de viteze $\mathbf{v}\,(x, y, t)$ are calitatea fundamentala ca ca poate sa fie masurat in fluidul fizic oferind o legatura directa cu experimentul si observatia. Este asadar natural ca orice studiu despre dinamica fluidelor sa fie exprimata in termeni de aceste trei functii iar orice abordare in termeni mai abstracti trebuie - in final - sa se intoarca catre aceste functii cu valoare empirica.

Este stiut ca in $2D$ exista cascada inversa, adica exista o curgere a energiei spectrale de la scale spatiale mici catre scale spatiale largi, limitate in final la domeniul insusi al observatiei ("box"). Simularile numerice ale fluidului Euler $2D$ in domenii limitate (box) si cu conditii dublu periodice confirma cu claritate aceasta proprietate. Prin doar adaugarea unei mici viscozitati si initializand fluidul in stare turbulenta fluidul evolueaza catre o stare de organizare foarte inalta: vorticitaea pozitiva si respectiv negativa sunt separate si sunt individual colectate in doua vortexuri largi, cu semn opus. Figurile publicate in referinte despre starile relaxate (asimptotice) sunt extrem de convingatoare [1] and [2]. Miscarea ajunsa la relaxare ramane ordonata pentru timp lung si in final este disipata prin frictiunea asociata vascozitatii slabe introduse initial. S-a determinat ca functia de curent (streamfunction) ψ in aceste stari asimptotice de relaxare verifica ecuatia *sinh*-Poisson

$$\Delta\psi + \lambda \sinh\psi = 0 \tag{2}$$

unde $\lambda > 0$ este un parametru. Seminifatia acestui fapt este foarte adanca si poate fi apreciata prin aceste consideratii. Daca dorim sa gasim solutiile stationare ale Eq.(1) vom lua $\partial\psi/\partial t = 0$ si deci vom cauta solutiile ecuatiei

$$\left[\left(-\mathbf{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z\right) \cdot \mathbf{\nabla}\right]\Delta\psi = 0 \tag{3}$$

Este evident (si foarte adesea adoptat) ca se poate rezolva aceasta ecuatie stationara exprimand vorticitatea ca o functie arbitrara de functia de curent : $\omega = \Delta\psi = F\,(\psi)$. Cu alte cuvinte este greu de gasit o functie F care sa NU verifice equatia Eq.(3). Echivalent, aceasta este o recunoastere a faptului ca Eq.(3) are un spatiu de solutii indefinit de mare. Totusi, natura nu confirma acest lucru : fluidul lasat sa evolueze dintr-o stare initiala turbulenta va sfarsi prin a se organiza conform uneia dintre solutiile $\psi\,(x, y)$ care verifica Eq.(2), *i.e.* adica evolueaza cu precizie catre o submultime de functii ce este infima in raport cu intreg spatiul de configuratii care aparent erau la dispozitia sa. Acest rezultat subliniaza in mod explicit contrastul urmator: in timp ce $\omega = F\,(\psi)$ cu functia F arbitrara este rezultatul unei legi de conservare $d\omega/dt = 0$, evolutia stricta catre solutii $\psi\,(x, y)$ ale Eq.(2) sugereaza ca exista stari exceptionale si ca acestea trebuie identificate printr-un principiu variational ce trebuie elaborat pentru acest sistem.

Ecuatia (2) este exact integrabila [3]. Deoarece in general structurile coerente si integrabilitatea sunt legate de proprietatea de auto-dualitate [4], ar fi de dorit sa putem elabora un cadru analitic din care sa rezulte limpede ca structurile coerente stationare ale fluidului $2D$ Euler reprezinta o consecinta a auto-dualitatii (SD). Notam ca, cel putin la prima vedere, o formulare clasica in termeni de $(\psi, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ nu pare a fi adecvata ca sa exprime proprietatea de auto-dualitate.

Cu toate ca acumularea de rezultate asupra dinamicii fluidului Euler este imensa, apare imediat un obstacol atunci vrem sa exploatam aceasta acumulare pentru a construi o formulare care sa evidentieze legatura : "curgere coerenta - auto-dualitate" . Formularea clasica utilizeaza legi de conservare in calitate de ecuatii dinamice. Divergenta-zero a campului de viteze este echivalenta cu ecuatia de continuitate, adica cu conservarea densitatii de masa a fluidului. Conservarea impulsului este de fapt versiunea fara disipare a ecuatiei Navier-Stokes care, dupa aplicarea operatorului $\boldsymbol{\nabla}\times$, devine Eq.(1). Alte legi de conservare sunt curent utilizate (energie, moment unghiular, etc.). Daca apare o modificare a vreuneia dintre variabilele de care depinde starea sistemului, legile de conservare arata cum trebuie sa se modifice celelalte variabile ale sistemului in asa fel incat sa se conserve anumite cantitati esentiale (masa, impuls, energie, etc.). Legile de conservare NU pot identifica starile exceptionale. Pentru aceasta avem nevoie de o functionala de starea sistemului si de un principiu variational capabil sa identifice evolutia catre stari exceptionale (sau: privilegiate) cum ar fi acelea ce verifica Eq.(2). Cu alte cuvinte avem nevoie de o descriere a miscarii fluidului intermeni de densitate de Lagrangian, a carui integrala pe spatiu-timp este functionala actiune. Ecuatiile dinamice ar fi atunci deduse drept ecuatii variationale Euler-Lagrange, prin extremizarea actiunii. In rezumat, noi folosim in mod curent legile de conservare drept ecuatii dinamice, ceea ce este formal incorect: ecuatiile dinamice sunt prin definitie ecuatiile Euler - Lagrange obtinute prin variatia unei functionale actiune. Problema dificila este - in mod evident - gasirea functionalei Lagrange pentru fluidul Euler $2D$. Aceasta functionala Lagrange trebuie sa fie rezultatul unei inferente corecte bazata pe proprietatile fizice ale sistemului, nu este suficient sa fie doar o functionala de minimizare sau de tip Lyapunov.

Cu toata dificultatea problemei, gasirea unei functionale Lagrange pentru fluidul Euler $2D$ este totusi posibila. Ceea ce face posibil este existenta unui model ce consta in versiunea discreta a dinamicii fizice exprimata prin Eq.(1): un set de vortexuri punctuale ce interactioneaza in plan printr-un potential generat de ele insele. Interactiunea este de scala spatiala mare ("long-range") adica de tip Coulombian iar ecuatiile de miscare sunt versiunea discreta a advectiei a vortexurilor de catre campul de viteze generat de ele insele. Este bine stabilit (si va fi reamintit mai jos) ca setul de vortxuri punctuale poate fi tratat ca un ansamblu statistic cu rezultatul ca la extremul entropiei se deduce Eq.(2) . Cateva alte aplicatii ale modelului discret au condus la rezultate interesante dar in general modelul este dificil de utilizat in mod direct. Din punctul de vedere a ceea ce cautam, adica un Lagrangian pentru fluidul Euler $2D$, modelul discret este insa extrem de sugestiv [5]. In loc de $(\psi, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ el utilizeaza *materie* (densitate de vortxuri punctuale), *camp* (corespunzand potentialului generat de vortexurile punctuale) si *interactie*. Aceasta inseamna ca, intorcandu-ne la limita continua dar prezervand aceasta structura , vom formula o teorie de camp clasica. Aceasta schimbare are loc la nivel de concept si deci inca un efort de inferenta originala este cerut pentru a formula functionala Lagrange adecvata. Urmand sugestia modelului vortexurilor punctuale doua campuri vor fi implicate in descriere un camp $\phi(x, y, t)$ reprezentand *materia* si un camp vetorial $A^{\mu}(x, y, t)$ unde $\mu = 0, x, y$, reprezentand *potentialul de gauge*. Natura vorticala a obiectelor elementare se regaseste in aceea ca sunt reprezentate printr-o marime de tip spinorial. Este convenabil sa se reprezinte vortxurile negative drept vortexuri pozitive ce se deplaseaza inapoin in timp, adica vortexurile pozitive si respectiv negative se comporta ca particule si antiparticule. Campul de meterie ϕ va fi reprezentat de un spinor mixt de tipul $x^{\alpha\dot{\beta}}$, care este o matrice 2×2 cu elemente compleze, ce se transforma conform unor transformari spinoriale distincte pe fiecare din cei doi indici (acesta este motivul existentei unui *dot* pe al doilea indice: β devine indice punctat). Asemenator, potentialul de etalonare este o matrice complexa 2×2 un element al algebrei $sl(2, \mathbf{C})$. Miscarea de tip Lorentz a vortexurilor elementare este reprezentata de termenul Chern-Simons din Lagrangian. O auto-interactie neliniara a campului de materie canceleaza, dupa folosirea constrangerii Gauss, interactia dintre rotationalul potentialului (adica campul magnetic) si densitatea de materie. Extremul actiunii corespunde starilor de auto-dualitate iar starile sunt stationare si verifica Eq.(2). Aceasta arata ca curgerea coerenta atinsa de fluidul Euler la relaxare apartine aceleiasi familii de tip soliton sau instanton, adica sunt pru neliniare. Se obtine prin aceasta si o deducere analitica perfect transparenta a ecuatiei Eq.(2), alternativa fata de abordarea statistica.

Un cadru vast de descriere a fluidului $2D$ Euler devine astfel disponibil, folosind puetrnicul formalism al teoriei de camp si apt sa exploateze realizarile sale in fizica vortexurilor (condensatul Bose-Einstein, supraconductibilitatea, teoriile topologice ca $O(n)$, stringurile (corzile) cosmice, etc.). Desigur, exista si limitari: trebuie inca gasite mijloace ca sa tinem cont de disipare si de schimbarea topologiei curgerii prin ruperea si reconectarea liniilor de curent, trebuie studiata si dinamica izo-topologica (adica intre evenimente disipative de reconexiune) si trebuie adaptat formalismul la diferite conditii la limita, etc. In aceasta lucrare ne-am focalizat pe pe fluidul $2D$ Euler ce evolueaza intr-un domeniu patratic cu conditii la limita dublu periodice. Este stiut ca fluidul evolueaza asimptotic catre solutii ale Eq.(2) si ca, in teoria de camp (FT), prezinta proprietatea de auto-dualitate. Atasam cea mai mare importanta acestui aspect deoarece a devenit din ce in ce mai clar ca toate structurile coerente cunoscute azi in teorie sunt rezultate la auto-dualitate [4].

Starile identificate de FT ca extremum a functionalei actiune sunt caracterizate prin: (1) stationaritate; (2) dubla periodicitate, *i.e.* functia $\psi(x, y)$ trebuie de fapt definita pe numai patratul "fundamental" in plan; (3) vorticitatea totala este zero; (4) starile verifica Eq.(2). Starile de auto-dualitate constinuite minimul absolut al energiei dar pentru ca ele sa fie atinse este nevoie ca sistemul sa aiba acces la o clasa de configuratii definita prin aceste simetrii : vorticitate totala zero si periodicitate spatiala dubla. In fluidul ne-disipativ aceste conditii sunt fixate in starea initiala iar starile SD nu pot fi atinse in general. Aceasta inseamna ca o clasa larga de stari asimptotice NU vor fi examinate. Relevanta acestor stari pentru fizica fluidului este un subiect de mare insemnatate, dar nu va fi tratat in aceasta lucrare.

In acest rezumat ne vom referi la deducerea starilor asimptotice auto-duale si, in plus, ne vom referi la comportarea fluidului in starile care preced atingerea starii de auto-dualitate. Vom deduce ecuatiile de miscare inainte de SD si vom calcula "curentul de materie" din FT. Vom deduce de asemenea ecuatiile care leaga amplitudinea partilor pozitiva respectiv negativa a campului de materie care de fapt se combina la SD intr-o singura functie, o variabila cu sens fizic, *vorticitatea*. Aceste ecuatii sunt similare dar nu sunt identice cu ecuatiile de continuitate si de fapt generalizeaza ecuatiile modelului Abelian [6].

Starea de SD depinde de egalitatea a doi parametri ce apar in expresia Lagrangianului. Deoarece suntem interesati in si de stari care sunt aproape - dar nu sunt exact la, - auto-dualitate, vom extinde studiul pentru a include si starile in care cei doi parametri din Lagrangian nu sunt egali dar evolueaza lent catre egalitate (necesara pentru SD). Apare ca posibil sa implementam (intr-o maniera globala) si evenimentele de reconexiune disipativa a liniilor de curent si deci evolutia topologiei catre un grad mai inalt de ordine, adica catre SD. Facand aceasta extindere gasim *atractie* intre vortexurile mesoscopice. (Numim vortexuri mesoscopice acele vortexuri ce au concentrat deja cea mai mare parte din vorticitatea fluidului, asa cum a fost ea initializata. Aceste vortexuri sunt de ambele semne (deoarece ele au colectat vorticitate de semnele corespunzatoare), se misca lent si fac obiectul fazei ultime de evolutie catre auto-organizare: intalnirea a doua vortexuri mesoscopice duce la coalescenta lor incat in final exista doar dipolul vazut in simulari numerice). Este interesant ca formularea de teorie de camp sugereaza interpretarea ca la fiecare eveniment de reconexiune se suprima o anumita cantitate de exces de "elicitate" pana cand de atinge identitatea a doua contributii la energie: energia FT este exact zero la SD deoarece energia poate fi exclusiv asociata miscarii centrelor vortexurilor mesoscopice (ceea ce devine zero la SD) iar miscarea fluidului pe liniile de curent are de fapt energie zero.

Ne aflam in fata unei probleme in care avem nevoie sa descriem o variatie a continutului topologic ("elicitatea" $\sim$ topologie) a curgerii. Acest lucru este supus restrictiei fundamentale ca intre clasele de echivalenta izo-topologica un fluid ideal are pereti de potential infiniti. Noi sugeram ca exista posibilitatea, - rezervata exclusiv formularii de teorie de camp - de a descrie cantitativ schimbarile de topologie, prin acelasi procedeu ca la studiul *baryogenesis* adica descresterea continutului de grad topologic provenind de la Chern-Simons. Deoarece termenul di Lagrangian care este astfel diminuat devine - la SD - patratul vorticitatii, apare ca exista o compatibilitate cu un fapt larg admis in evolutia fluidleor catre stari ordonate, adica descresterea enstrofiei.

2 Modelul de vortexuri punctuale in interactie

Cantitatile fizice care descriu dinamica bi-diemnsioala a fluidului sunt $\psi \equiv$ functia de curgere ("streamfunction"), $\mathbf{v}\equiv$ viteza, $\omega\widehat{\mathbf{e}}_z$ = vorticitatea, legate prin relatiile

$$\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z \quad , \quad \omega = \Delta\psi \tag{4}$$

si sunt solutii ale ecuatiei Euler (1). Forma discretizata aacestei ecuatii a fost intens studiata [7], [8], [9], [10]. Limita continua a discretizarii este matematic echivalenta cu dinamica fluidului. Vom aminti doar cateva aspecte, la care vom face referire mai tarziu.

Sa consideram discretizarea vorticitatii $\omega(x,y)$ intr-un set de $2N$ vortxuri punctuale ω_i fiacre purtand cantitatea elementara ω_0 ($=$ const > 0) de vorticitate ce poate fi pozitiva sau negativa $\omega_i = \pm\omega_0$. Exista N vortexuri cu vorticitate ω_0 si N vortxuri cu vorticitate $-\omega_0$. Pozitia curenta in pan a unui vortex punctual este (x_i, y_i) la momentul t. Deci vorticitatea se poate exprima ca

$$\omega(x,y) = \sum_{i=1}^{2N} \omega_i a^2 \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i) \tag{5}$$

unde a este raza suportului efectiv a unei reprezentari netede a functiei Dirac δ care aproximeaza produsul celor doua functii δ [7]. In locul lui $\omega_i a^2$ se poate folosi *circulatia* γ_i care ste integrala vorticitatii pe o arie mica in jurul punctului (x_i, y_i): $\gamma_i = \int d^2x \omega_i$ [10]. Solutia formala a ecuatiei $\Delta\psi = \omega$, ce conecteaza vorticitatea si functia de curent se obtine folsind functia Green a operatorului Laplace

$$\Delta_{x,y} G(x,y;x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{6}$$

unde (x', y') este un punct de referinta din plan. Asa cum se arata in Ref.[7] $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ poate fi aproximata pentru a mic in comparatie cu extensia spatiala a fluidului, L, $a \ll L$, ca functia Green a Laplacianului

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}') \approx \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{L}\right) \tag{7}$$

unde L este lungimea laturii domeniului patrat din plan. Solutia ecuatiei $\Delta\psi = \omega$ este obtinuta folosind functia Green, si introducand circulatia $\gamma_i = \omega_i a^2$,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{2N} \gamma_i \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{L}\right) \tag{8}$$

Viteza celui vortexului k este $\mathbf{v}_k = -\left.\boldsymbol{\nabla}\psi\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} \times \widehat{\mathbf{e}}_z$ iar ecuatiile de miscare sunt

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= v_x^{(k)} = -\sum_{i=1, i\neq k}^{2N} \gamma_i \frac{1}{2\pi} \frac{y_k - y_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2} \\ \frac{dy_k}{dt} &= v_y^{(k)} = \sum_{i=1, i\neq k}^{2N} \gamma_i \frac{1}{2\pi} \frac{x_k - x_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Ecuatiile pot fi deduse dintr-un Hamiltonian

$$H=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{2N}\sum_{j=1}^{2N}\gamma_i \ln\left(\frac{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}{L}\right)\gamma_j \tag{10}$$

Methoda standard de descriere este de tip statistic [11], [7], [8]. Vortexurile elementare sunt vazute ca elemente ale unui sistem de particule aflate in interactiune (la fel ca un gaz) care exploreaza ansamblul starilor microscopice ce conduc la o unica manifestare macroscopica a curgerii fluidului. Numarul de vortexuri pozitive in starea i este N_i^+ iar numarul de vortexuri negative in starea i este N_i^-. Numarul total de vortexuri positive respectiv negative este egal: $N^+=\sum_i N_i^+=\sum_i N_i^-=N^-$. Acest sistem are temperatura statistica negativa atunci cand energia este zero ori pozitiva [12]. Energia sistemului discret de vortexuri punctuale este $\mathcal{E}=\frac{1}{2}\sum_{ij}\omega(\mathbf{r}_i)\,G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)\,\omega(\mathbf{r}_j)$ unde $\omega(\mathbf{r}_i)=-\left(N_i^+-N_i^-\right)$ este vorticitatea. Probablitatea unei stari este calculata ca o expresie combinatoriala. Probabilitatea unei stari,

$$\mathcal{W}=\left\{\frac{N^+!}{\prod_i N_i^+!}\right\}\left\{\frac{N^-!}{\prod_i N_i^-!}\right\} \tag{11}$$

Entropia este logaritmul acestei expresii iar prin extremizare se gaseste

$$\ln N_i^{\pm}+\alpha^{\pm}\pm\beta\sum_j G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)\left(N_j^+-N_j^-\right)=0 \tag{12}$$

unde $\alpha^{\pm}$ si β sunt multiplicatori Lagrange introdusi ca sa asigure $\sum N_i^+=\sum N_i^-=N=\mathrm{const}$ precum si conservarea energiei $\mathcal{E}$. Solutiile ce extremizeaza sunt scrise in termenii unei functii continui $\psi(x,y)$

$$N_i^{\pm}=\exp\left[-\alpha^{\pm}\mp\beta\psi(x,y)\right]$$

cee ce implica relatia $N_i^+N_i^-=\mathrm{const}$, iar acest lucru conduce la *sinh*-Poisson (2). Abordarea statistica a trebuit sa faca fata la probleme dificile, cunoscute si larg dezbatute: sistemul are o spatiu al fazelor finit; nu exista limita termodinamica; nu exista ergodicitate; temperatura este negativa; entropia este utilizata intr-un mod ce este contra-intuitiv, adica maximul entropiei, in mod obisnuit maximul dezordinii, este aici maximul ordinii; starea finala a sistemului nu este un echilibru statistic obisnuit ci consta dintr-o dispunere ne-fluctuanta a vortexurilor elementare incat sa compuna o solutie a ecuatiei (2). Cu toate acestea, abordaarea statistica a reusit sa deduca Eq.(2), este confirmata practic aplicativ si a permis dezvoltarea a numeroase aspecte inrudite. Deoarece abordarea prin teorie de camp este diferita intr-un mod esential, trebuie sa deducem ca abordarea statistica a identificat, in felul sau specific, auto-dualitatea. Cateva aspecte ale abordarii statistice vor fi discutate in conexiune cu formularea de teorie de camp.

3 Formularea in termeni de teorie de camp a limitei continuum a modelului de vortexuri punctuale

In sistemul fizic real, curgerea este reprezentata prin miscarea de tip Lorentz a setului de vortexuri punctuale fara masa. Notam totusi ca niciunde, in formularea (9) nu este explicit faptul ca avem de a face cu vortexuri. Aceleasi ecuatii descriu un sistem de sarcini electrice punctuale [13], [6] sau curenti [14]. Informatia ca este vorba de vortexuri adica obiecte ce au natura de vectori, trebuie adaugata subplimentar sistemului (9). Notam, legat de aceasta, ca a treia axa (z) desi este nerelevanta pentru miscarea plana este implicit prezenta in model.

In modelul de baza (Kraichnan and Montgomery [7], care va fi adoptat ca model de referinta) se considera ca vortexurile elementare au magnitudine egala ω_0 si, pentru periodicitate, numarul vortexurilor pozitive trebuie sa fie egal cu numarul vortexurilor negative, N. Acest N este invariant, *i.e.* nu este permis in model schimbarea directiei (flip) sau anihilarea de vortexuri. Vorticitatea fizica ω intr-un punct (x, y) se obtine plasand impreuna n vortexuri elementare, $\omega \approx n\omega_0$ intr-o arie elementara in jurul punctului (x, y). Modelul nu permite sa se construiasca obiecte de acceasi natura dar de amplitudine dubla sau tripla *i.e.* $\pm 2\omega_0$, $\pm 3\omega_0$, etc. nu sunt permise ca obiecte independente. Reprezentarea vorticitatii se face prin densitatea de vortexuri elementare si nu prin suprapunerea obiectelor de acelasi semn si crearea altora mai mari, restrictie ce este similara cu aceea ce ar rezulta din principiul de excluziune a lui Pauli pentru particule fermionice.

Avem deci doua tipuri de obiecte elementare, purtand $+\omega_0$ si respectiv $-\omega_0$ cantitate de vorticitate. Aceste vortexuri elementare sunt asemanatoare cu particule fara masa ce poarta un spin semi-intreg dar ce ramane fix, neschimbat in proiectia lui de-a lungula axei z. Interactia dintre vortexurile punctuale elementare doar afecteaza pozitiile lor in plan si nu schimba spinul respectiv proiectia acestuia: suntem deci in domeniul clasic.

Considerand deci o cantitate elementara fixa de vorticitate $\pm\omega_0$ pentru vortexul elementar, nu exista nici un motiv sa ne imaginam cum a fost generata aceasta vorticitate, cu alte cuvinte nu este cazul sa imaginam prezenta unui fluid intre vortexuri punctuale. Modelul vortexurilor punctuale inlocuieste complet modelul bazat pe variabilele fizice $(\psi, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$. Totusi, pentru scopuri pur teoretice ne putem imagina ca in jurul fiecarui vortex elementar exista un fluid ce se roteste incat sa creze vorticitatea elementara ω_0. Desigur, nu exista o alegere unica a acestei distributii spatiale de curgere azimutala. Diferenta dintre vortexurile pozitive $(+\omega_0)$ si negative $(-\omega_0)$ este directia curgerii vorticale asociatein plan: vom lua directia trigonometrica (impotriva acelor de ceasornic) pentru $+\omega_0$ si anti-trigonometrica (adica in sensul acelor de ceasornic) pentru $-\omega_0$. Notam proprietatea particulara ce se releva prin reprezentarea bazata pe fluidul virtual aflat in rotatie, asa cum l-am considerat mai sus: vortexul negativ se poate obtine din vortexul pozitiv prin inversarea directiei timpului deoarece aceasta conduce la inversarea sensului de rotatie a fluidului vortual. Mai mult, aceasta asigura invarianta la inversia temporala daca numarul de vortexuri negative este egal cu numarul de vortexuri pozitive.

Asa cum explica Kraichnan si Montgomery [7] structura verticala elementara in $3D$ este un inel de vorticitate. Un inel de vorticitate in $3D$, avand o sectiune infinitesimala intersecteaza un plan ce contine centrul inelului si este transversal pe planul inelului, in doua puncte. In vecinatatea acestor puncte inelul $3D$ este aprxomativ reductibil la doua vortexuri liniare elementare perpendiculare pe plan si avand vorticitati de semne opuse. Adaugam la aceasta imagine observatia ca o curgere axiala in inelul $3D$ devine, dupa reducerea din vecinatatea planului o curgere perpendiculara pe acel plan in directia z-pozitiva pentru unul dintre cei doi vortexuri liniari si in directie z-negativa pentru perechea vortex cu semn opus de vorticitate. Particularitatea fluidului Euler in $2D$ ce este transferata si modelului discret, este invarianta in raport cu orice deplasare de-a lungul axei z, aceasta deplasare putand fi definita local arbitrar. Vom considera, fara sa pierdem din generalitate, ca vortexul pozitiv $(+\omega_0)$ are momentul $\mathbf{p} = p_0\widehat{\mathbf{e}}_z$ iar in acord cu imaginea ce reprezinta o pereche de vortexuri opuse ca provenind dintr-un vortex inelar $3D$ avand si curgere axiala, vortexul negativ are momentul $\mathbf{p} = -p_0\widehat{\mathbf{e}}_z$. Filamentele de vorticitate transversale pe plan pot avea o translatie de-a lungul axei irelevante (z) cu un moment arbitrar, p_0. Din nou remarcam ca inversia temporala lasa invariant sistemul, cu vortexurile pozitive aplicate pe vortexuri negative. Aceasta va face ca vortexurile negative sa fie de fapt definite drept anti-vortexuri, similare cu anti-particulele.

In cazul vortexurilor punctuale ale fluidului Euler vortexurile de energie pozitiva care se propaga inainte in timp sunt vortexurile fizice. Vortexurile obtinute prin reflectie temporala se porpaga inapoi in timp dar ele pot fi considerate vortexuri fizice cu sarcina opusa (*i.e.* vorticitate $\omega_0 \to -\omega_0$) si cu propagare inainte in timp. Aceste vortexuri sunt pur si simplu vortexuri cu vorticitate opusa.

In relatie cu analogia chirala, avem vortexuri care sunt "dextrogire' si vortexuri ce sunt "levogire" (“right-handed” and respectively “left-handed” vortices).

Elementele curgerii in fluidul Euler sunt vortexuri elementare punctuale cu vorticitate pozitiva sau negativa. Vortexurile elementare pozitive: (1) se rotesc in sens trigonometric in plan: $\omega\widehat{\mathbf{e}}_z \sim \boldsymbol{\sigma}$ spinul este orientat in sus; (2) se deplaseaza de-a lungul axei z in directie pozitiva: $\mathbf{p} =\widehat{\mathbf{e}}_z p_0$; (3) au chiralitate pozitiva: $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. Vortexul pozitiv poate fi reprezentat ca un punct care se deplaseaza pe o elice pozitiva, in sus. In proiectie vazuta de deasupra planului, inspre plan, se vede un cerc pe care un punct de deplaseaza in sens invers acelor de ceasornic.

Vortexurile elementare negative: (1) se rotesc in plan in sens anti-trigonometric (in sensul acelor de ceasornic): $(-\omega)\,\widehat{\mathbf{e}}_z \sim -\boldsymbol{\sigma}$ spinul este orientat in jos; (2) se deplaseaza de-a lungul axei z in directie negativa: $-\mathbf{p} =\widehat{\mathbf{e}}_z\,(-p_0)$, adica in directia $-z$; (3) au chiralitate pozitiva: $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. Vortexurile negative pot fi representate ca un punct care se deplaseaza pe o elice pozitiva -acceasi ca aceea mentionata mai sus - dar se deplaseaza in jos. In proiectie de deasupra planului privind spre plan se vede un cerc pe care un punct se misca in directia acelor de ceasornic.

Vortexurile pozitive si negative au aceeasi *chiralitate* iar intr-un punct unde exista suprapunerea unui vortex pozitiv cu unul negativ *chiralitatea* se aduna. In particular, vidul consta din perechi de vortexuri pozitive si negative, fara nici o miscare a fludiului, ceea ce in variabilele fizice inseamna: $\psi \equiv 0$, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$. In formularea de teorie de camp (FT) vidul consta din suprapunerea vortexurilor pozitive si negative, ceea ce inseamna: (1) zero spin, sau zero *vorticitate*; (2) zero momentum $\mathbf{p} = \mathbf{0}$; (3) $2\times$ sarcina chirala. Fluidul Euler la echilibru ($\psi = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$) este intr-un vid cu *rupere spontana de invarianta chirala.*

Ne putem acum intoarce ca sa comentam rezultatul analizei statistice bazate pe maximul entropiei pentru sistemul de vortxuri punctuale. Rezultatul a fost $N_i^+ N_i^- = \text{const.}$ Aceasta inseamna ca in scopul generarii unei vorticitati fizice pozitive $|\omega|$ intr-un punct nu va fi suficient sa luam un numar de vortexuri elementare pozitive $|\omega| = N_i^+ \omega_0$. Trebuie sa luam de asemenea si un numar de vortexuri punctuale negative $\left(N_i^-\right)$ si sa le plasam in aceeasi arie infinitesimala (legate de discretizare) si sa obtinem vorticitatea pozitiva dorita $|\omega|$ ca o diferenta a celor doua contributii, $|\omega| = \left|N_i^+ - N_i^-\right|$. Nici una din cele doua componente nu poate lipsi complet, adica nu poate fi exact egal cu zero vreunul din cele doua numere, $N_i^\pm \neq 0$. Aceasta a fost prima indicatie ca vortxurile elementare nu sunt atat de simple ca niste bucati de vorticitate. Vorticitate zero nu inseamna absenta lui $N_i^\pm$. In "vid" amandoua aceste numere *trebuie* sa ramana nenule dar ele acum sunt egale si implicit exista anihilare a curgerilor lor virtuale si a momentelor pe axa z. Aceasta corespunde cu starea de [ereche a vortexurilor si a anti-vortexurilor. Intr-o imagine fermionica a sistemului discret avem ca spinul este zero dar sarcina chirala este 2. Sistemul discret este un exemplu, in lumea clasica, a ruperii spontane a simetriei chirale.

Energia in limita continua a modelului discret de vortexuri punctuale se scrie, in virtutea Eq.(10)

$$E = \frac{1}{2\pi} \int d^2x d^2x' \omega(\mathbf{x}) \ln\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{L}\right) \omega(\mathbf{x}') \tag{13}$$

Sesizam acum o problema ce este asemenatoare cucea precedenta, cea referitoare la natura vortexurilor punctuale (vortexuri sau centre de ghidare sau sarcini sau curenti). De aceasta data problema apare din aceea ca exacta aceeasi expresie pentru energie poate fi scrisa pentru un gaz Coulombian de sarcina cu densitatea $\rho(\mathbf{x})$ in plan, prin inlocuirea $\omega(\mathbf{x}) \to \rho(\mathbf{x})$. In acest caz totusi interactia conduce la o miscare relativa orientata de-a lungul axei ce uneste cele doua sarcini. Directia miscarii relative rezultate din interactia a doua sarcini punctuale este data de gradientul functiei scalare $\psi(\mathbf{x}) = \int d^2x' \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/L)\rho(\mathbf{x}')$. Acelasi potential scalar este introdus pentru vortexuri punctuale (8). Dar in acest caz, doua vortexuri aflate in interactie se misca in directii ce sunt perpendiculare pe linia ce le uneste, *i.e.* vortexurile tind sa se roteasca unul in jurul altuia. Deducem ca, pentru un sistem de vortexuri punctuale, Hamiltonianul trebuie sa fie *suplimentat* cu prescriptia ca viteza este ca aceea a unei sarcini in camp magnetic, adica geostrofica

$$\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z \tag{14}$$

sau, echivalent, este de tipul $E \times B$.

Observatiile precedente se dovedesc esentiale atunci cand se trece la formularea FT: in primul rand, faptul ca ecuatiile de miscare ale obiectelor punctuale se refera la *vortexuri* (deci nu la sarcini, curenti, etc.) impune sa consideram o reprezentare ne-Abeliana a acestor obiecte, ceea ce in final ne condice la spinori micsti. In al doilea rand, faptul ca Hamiltonianul trebuie suplimentat cu prescriptia ca miscarea este pur cinematica (*i.e.* noi deducem direct viteza din ψ ca in Eq.(14)) si ca viteza este de tip $E \times B$ necesita sa adoptam termenul Chern-Simons (CS) in Lagrangianul sistemului. Termenul CS este sursa (si sustine) continutul vortical al dinamicii. Pentru a inchide discutia referitoare la contrastul dintre vortexuri alfate in interactie ($\mathbf{v} \sim -\boldsymbol{\nabla}\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z$) si sarcini care interactioneaza in plan (force $\sim \boldsymbol{\nabla}\psi$), notam ca Lagrangianul celui de-al doilea sistem nu include termenul Chern-Simons iar starile asimptotice verifica ecuatia Landau-Ginzburg. Pentru vortexuri punctuale trebuie sa includem termenul Chern-Simons iar ecuatia asimptotica este *sinh*-Poisson.

Modelul de teorie de camp pentru un sistem de sarcini ce interactioneaza in plan conform cu ecuatiile Eqs.(9) a fost formulat deJackiw si Pi [6] cu scopul de a oferi o descriere a Efectului Hall Quantic Fractionar. Partea clasica a analizei din aceasta lucrare a identificat extremul actiunii ca stari de auto-dualitate ce verifica ecuatia Liouville. Extensia non-Abeliana a acestui model a fost introdusa si discutata de Dunne *et al.* pentru algebra $su(N)$, cu N arbitrar [15], [16]. Stuctura $sl(2,\mathbf{C})$ Non-Abeliana este necesara datorita naturii *verticale* a obiectelor elementare. Datorita extinderii spatiului particulelor (vortxuri elementare) cu anti-particule (anti-vortexuri) cerute de invarianta la transformarile de paritate campul de materie este reprezentat de un *spinor mixt.* Prin contrast, Jackiw si Pi obtin ecuatia Liouville in modelul de *sarcini scalare* in plan.

Lagrangianul este [16]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& -\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{tr}\left(\left(\partial_\mu A_\nu\right)A_\rho + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right) \\ & + i\mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\left(D_0\phi\right)\right) - \frac{1}{2m}\mathrm{tr}\left(\left(D_k\phi\right)^\dagger\left(D^k\phi\right)\right) \\ & - V\left(|\phi|\right)\end{aligned} \tag{15}$$

unde $D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu,]$ iar κ, m sunt constante pozitive. Potentialul de auto-interactie a campului de materie este

$$V\left(|\phi|\right) = -\frac{g}{2}\mathrm{tr}\left(\left[\phi^\dagger,\phi\right]^2\right) \tag{16}$$

Ecuatiile Euler - Lagrange pentru functionala actiune $\mathcal{S} = \int dxdydt\mathcal{L}$ sunt ecuatiile de miscare

$$\begin{aligned} iD_0\phi &= -\frac{1}{2m}D_kD^k\phi - g\left[\left[\phi,\phi^\dagger\right],\phi\right] & (17) \\ \kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} &= iJ^\mu & (18) \end{aligned}$$

unde curentul

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\phi,\phi^\dagger\right] & (19) \\ J^k &= -\frac{i}{2m}\left(\left[\phi^\dagger,\left(D^k\phi\right)\right] - \left[\left(D^k\phi\right)^\dagger,\phi\right]\right) & (20) \end{aligned}$$

verifica conservarea covarianta $D_\mu J^\mu = 0$. Desnitatea de energue este

$$E = \frac{1}{2m}\mathrm{tr}\left(\left(D_k\phi\right)^\dagger\left(D^k\phi\right)\right) - \frac{g}{2}\mathrm{tr}\left(\left[\phi^\dagger,\phi\right]^2\right) \tag{21}$$

The Gauss law is the zero component of the second equation of motion

$$2\kappa F_{12} = iJ^0 = i\left[\phi,\phi^\dagger\right] \tag{22}$$

In cele ce urmeaza vom utiliza combinatii convenabile de variabile: $A_\pm \equiv A_x \pm iA_y$, $\partial/\partial z = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x - i\partial/\partial y\right)$, $\partial/\partial z^* = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x + i\partial/\partial y\right)$, si similare. Scriind

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\left(D_k\phi\right)^\dagger\left(D^k\phi\right)\right) &= \mathrm{tr}\left(\left(D_-\phi\right)^\dagger\left(D_-\phi\right)\right) - i\mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\left[F_{12},\phi\right]\right) & (23) \\ &\quad -m\varepsilon^{ij}\partial_i\left[\phi^\dagger\left(D_j\phi\right) - \left(D_j\phi\right)^\dagger\phi\right] \end{aligned}$$

se inlocuieste in expresia densitatii energiei si notam ca pentru campuri netede putem sa ignoram ultimul termen care va fi evaluat la frontiera

$$E = \frac{1}{2m}\mathrm{tr}\left(\left(D_-\phi\right)^\dagger\left(D_-\phi\right)\right) + \left(-\frac{g}{2} + \frac{1}{4m\kappa}\right)\mathrm{tr}\left(\left[\phi^\dagger,\phi\right]^2\right) \tag{24}$$

Pentru $\kappa = |\kappa|$ alegerea constantelor

$$g = \frac{1}{2m\kappa} > 0 \tag{25}$$

permite sa se obtina minimul absolut al actiunii (adica starile de auto-dualitate, SD) si deci va fi adoptat in continuare. Mai tarziu vom discuta si efectul optiunii de a nu lua constante aflate in relatia Eq.(25). Starile sunt *stationare* $\partial_0\phi = 0$ si minimizeaza energia ($E = 0$). Adaugand constrangerea Gauss se obtine un set de doua ecuatii

$$\begin{aligned} D_-\phi &= 0 & (26) \\ F_{12} &= \frac{i}{2\kappa}\left[\phi,\phi^\dagger\right] & (27) \end{aligned}$$

Din aceste ecuatii de deduce ecuatia *sinh*-Poisson [15]. Aceste stari corespund cu conditia de curbura zero intr-o formulare ce implica reducerea la doua dimensiuni a unui sistem Yang Mills auto dual asa cum este aratat in [15]. Consideran deci justificat sa folosim termenul de auto-dualitate drept caracteristica fundamentala a acestor stari. Functiile ϕ si A_μ sunt spinori micsti, elemente ale algebrei $sl\left(2,\mathbf{C}\right)$. Adoptand ipoteza urmatoare despre structura algebrica (*"algebraic ansatz"*),

$$\phi=\phi_1 E_+ + \phi_2 E_- \ , \ \phi^\dagger = \phi_1^* E_- + \phi_2^* E_+ \tag{28}$$

si

$$A_- = aH \ , \ A_+ = -a^* H \tag{29}$$

care se bazeaza pe cei trei generatori (E_+, H, E_-) din baza Chevalley, ecuatia Gauss devine

$$\frac{\partial a}{\partial x_+}+\frac{\partial a^*}{\partial x_-}=\frac{1}{k}\left(\rho_1-\rho_2\right) \tag{30}$$

Din partea ce contine E_+ respectiv din aceea ce contine E_- in prima ecuatie de miscare $D_-\phi=0$ se obtine

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z}+a\phi_1=0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z}-a\phi_2=0 \tag{32}$$

Folosind Eqs.(31) si conjugata sa complexa partea din stanga al ecuatiei Eq.(30) devine

$$\frac{\partial a}{\partial x_+}+\frac{\partial a^*}{\partial x_-}=-2\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}\ln\left(\left|\phi_1\right|^2\right)=-\frac{1}{2}\Delta\ln\left(\left|\phi_1\right|^2\right)$$

Ecuatia (30) devine

$$-\frac{1}{2}\Delta\ln\rho_1=\frac{1}{\kappa}\left(\rho_1-\rho_2\right) \tag{33}$$

Eq.(32) permite sa se exprime a si a^* in termeni de ϕ_2. Partea stanga a Eq.(30) devine

$$\frac{\partial a}{\partial x_+}+\frac{\partial a^*}{\partial x_-}=2\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}\ln\left(\left|\phi_2\right|^2\right)=\frac{1}{2}\Delta\ln\left(\left|\phi_2\right|^2\right)$$

Cealalta forma a Eq.(30) este

$$\frac{1}{2}\Delta\ln\rho_2=\frac{1}{\kappa}\left(\rho_1-\rho_2\right) \tag{34}$$

Partea dreapta a Eqs.(33) si (34) este aceeasi si daca scadem cele doua ecuatii se obtine

$$\Delta\ln\rho_1+\Delta\ln\rho_2=0 \tag{35}$$

Aceasta insemana $\rho_1\rho_2 = \exp(\sigma)$ unde σ este o*functie armonica*, $\Delta\sigma = 0$. Daca luam $\sigma \equiv 0$, avem $\rho_1 = \rho_2^{-1} \equiv \rho$ si se poate introduce o functie scalara unica ψ, definita prin $\rho = \exp(\psi)$. In acest caz Eqs.(33) si (34) iau o forma unica

$$\Delta \ln \rho = -\frac{2}{\kappa}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \tag{36}$$

care este ecuatia *sinh*-Poisson (cunoscuta de asemenea drept ecuatia eliptica *sinh*-Gordon)

$$\Delta\psi + \frac{4}{\kappa}\sinh\psi = 0 \tag{37}$$

Modelul descrie corect starile de auto-dualitate si identifica starile asimptotice de relaxare ale fluidului (despre care este confirmat ca verifica ecuatia *sinh*-Poisson [2] , cu starile de auto-dualitate.

Totusi este necesar sa se examineze modelul prezentat si in starile in care sistemul nu este la auto-dualitate. Atunci energia nu este zero si $\rho_1\rho_2 \neq 1$. Doar la SD avem relatia $\rho_1 = \rho_2^{-1}$ si putem folosi un singur ψ. Putem totusi sa definim ω pe baza campului de gauge A^μ, ca $\omega \sim F_{12} \sim F_{+-}$. In faza de dinainte de a atinge starea de relaxare (SD) vedem campul potential de etalonare ca un camp de viteze ce sustine dinamica campului de materie ϕ.

4 Paralela intre abordarile bazate pe teorie de camp si respectiv pe fizica statistica

Nu se poate stabili o corespondenta simpla care sa lege notiunile si operatiunile din modelul fluidului fizic formulat in termeni de $(\psi, \mathbf{v}, \omega)$, modelul de vortexuri punctuale (x_i, y_i) si modelul bazat pe teoria de camp $(\phi,\ A_\mu)$. In cele ce urmeaza notam cateva conexiuni sugestive.

4.1 Conditia de consistenta

Pentru o pozitie arbitrara in plan (x, y) , suma contributiilor tuturor vortexurilor punctuale, propagata prin $G(x, y; x', y')$ functia Green a Laplacianului (*i.e.* membrul drept in Eq.(9)) ofera viteza pe care ar avea-o un vortex punctual daca ar fi plasat in acel punct (x, y). Cunoscand variatia spatiala locala a acestei viteze se poate calcula vorticitatea in acel punct ales. Pe de alta parte densitatea de vortexuri punctuale in acelasi punct (pozitive si negative) de asemenea determina vorticitatea. Deci dispunem de vorticitate in (x, y) calculata in doua moduri diferite: ca rotationalul vitezei calculate din contributia tuturor vortexurilor punctuale (cu exceptia celui din punctul curent (x, y) pentru a evita singularitatea), si, pe de alta parte, din densitatea de vortexuri punctuale pozitive/negative ce sunt acumulate intr-o arie infinitezimala in jurul lui (x, y). Conditia de consistenta impune ca aceste doua valori pentru vorticitate sa fie identice. Pentru modelul de vortexuri discrete acesta ramane un exercitiu imaginar dar in FT aceasta compatibilitate este asigurata de legea Gauss care este a doua dintre ecuatiile de miscare ale modelului FT, obtinuta prin variatia actiunii la componenta temporala a potentialului de etalonare $A_0(x,y)$. Aceasta conditie de consistenta exprima faptul ca F_{12} , care este campul magnetic B sau rotationalul vitezei, este egal cu componenta "zero" (adica "sarcina") curentului, care este diferenta $\rho_1 - \rho_2$ adica vorticitatea, la SD. La o concluzie similara a ajuns Montgomery (1993) : "consistenta inseamna ca starea "cea mai probabila" genereaza exact acel camp de viteze in care vortexurile sunt convectate".

Conditia se exprima analitic astfel $\frac{i}{2\kappa}J^0 = F_{12}$ ceea ce trebuie sa fie citit in aceasta ordine: vortcitatea (adica densitatea de vortexuri punctuale, pozitive si negative, mai general J^0) este egala cu rotorul vitezei adica cu curbura conexiunii A_μ.

4.2 Nici unul dintre cele doua tipuri de vortexuri aflate intr-un punct din plan nu poate fi zero

In modelul discret valoarea vorticitatii in fiecare celula se obtine din inegalitatea numarului de vortexuri pozitive si negative

$$\omega_i = -\left(N_i^+ - N_i^-\right) \tag{38}$$

Joyce si Montgomery [13] gasesc relatia

$$N_i^+ N_i^- = const \tag{39}$$

care inseamna ca in aceeasi stare i numarul de vortexuri pozitive este inversul numarului de vortexuri negative. Starea i este de fapt pozitia spatiala (x,y). Aceasta exclude situatia ca vreunul dintre $N_i^\pm$ poate fi zero. Aceeasi relatie este dedusa in modelul FT [Eq.(35)]. Aceasta devine la SD o proprietate de invarianta a modelului FT la inversiune:

$$\rho \to 1/\rho.$$

4.3 Energia

Energia fluidului este

$$E = \frac{1}{2}\int d^2r\,|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 = -\frac{1}{2}\int d^2r\;\omega\psi \tag{40}$$

Daca doar traducem aceasta expresie in termeni de FT la starea asimptotica SD rezulta

$$\begin{aligned} E^{FT} &= \frac{1}{\kappa}\int d^2r\;\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\ln\rho \\ &= \frac{1}{\kappa}\int d^2r\left(\rho\ln\rho + \frac{1}{\rho}\ln\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

care este legata de entropia $S = 2\beta E$ sistemului discret dar care este acum exprimata in termeni de variabila ρ,

$$S = \ln W = \sum_i \left(N_i^+ \ln N_i^+ + N_i^- \ln N_i^- \right) \tag{42}$$

si sugereaza din nou identificarea $N_i^+ \to \rho$ si $N_i^- \to 1/\rho$ la SD.

4.4 Elicitatea in formularea de teorie de camp

Elicitatea conventionala in $2D$ este exact zero, din geometria curgerii: $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Totusi termenul Chern - Simons din Lagrangian poarta o semnificatie similara (se poate foarte usor recunoaste ca termenul CS generalizeaza produsul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, adica elicitatea unei configuratii de camp magnetic). La stationaritate, asa cum este SD, termenul Chern-Simons devine

$$\begin{aligned} -\kappa\varepsilon^{\mu\nu 0}\mathrm{tr}\left(\left(\partial_\mu A_\nu\right) A_0 + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_0 \right) &= -\kappa\varepsilon^{ij}\mathrm{tr}\left(A_i \dot{A}_j \right) - \kappa \mathrm{tr}\left(A_0 F_{12}\right) &(43)\\ &= -\kappa \mathrm{tr}\left(A_0 F_{12}\right) &(44) \end{aligned}$$

iar din constrangerea Gauss (H este generatorul sub-algebrei Cartan)

$$A_0 = -\frac{i}{4m\kappa}\left[\phi, \phi^\dagger\right] = -\frac{i}{4m\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right) H = \left(\frac{i}{8m}\omega\right) H \tag{45}$$

si $F_{12} \equiv F_{xy} = B = (-i\omega/4)\, H$. Din (45) notam ca A_0 este pur imaginar. Campul B depinde de functiile de materie $\rho_{1,2}$ prin constrangerea Gauss

$$B = F_{12} = \frac{i}{2\kappa}\left[\phi, \phi^\dagger\right] = \left(-\frac{i}{4}\omega\right) H \tag{46}$$

unde ultima egalitate are loc la SD. La stationaritate

$$\mathcal{L}_{CS} = -\kappa \mathrm{tr}\left(A_0 F_{12}\right) = -\omega^2 \frac{\kappa}{16m} \tag{47}$$

Aceasta parte din functionala actiune este legata de elicitatea dinamicii. Notam ca are aceeasi natura ca termenul de auto-interactie a materiei (ultimul termen din Lagrangian) ceea ce inseamna ca la SD vorticitatea fizica este de fapt reprezentata prin doua functii distincte: folosind campul de materie $\sim \left[\phi, \phi^\dagger\right]$ si respectiv folosind campul de etalonare $F_{12} \sim \left[\phi, \phi^\dagger\right]$.

4.5 Entropia

Abordarea statistica (SA) a modelului discretizat foloseste entropia unui gaz de vortexuri punctuale si cauta extremul acestei entropii sub constrangerea pastrarii unui numar constant de vortexuri pozitive respectiv negative (separat) plus constrangerea de energie fixa. Pentru a schita o paralela cu abordarea bazata pe teorie de camp, scriem *functia de partitie* a sistemului dat de Lagrangianul FT

$$
\begin{aligned}
Z &= \int D[\phi] D\left[\phi^{\dagger}\right] D[A^{\mu}] D\left[A^{\mu\dagger}\right] \exp\left(i\int d^2x dt\ \mathcal{L}\right) \qquad (48)\\
&= \int D[\phi] D\left[\phi^{\dagger}\right] D[A_{+}] D[A_{-}] \delta(\Phi) \\
&\quad \times \exp\left\{ i\int d^2x \left[4\rho_1 \left| \frac{\partial}{\partial z}\ln\phi_1 + a\right|^2 + 4\rho_2 \left| \frac{\partial}{\partial z}\ln\phi_2 - a\right|^2 \right]\right\}
\end{aligned}
$$

cu Jacobianul 1 pentru schimbarea de variabile $\left(A^{\mu}, A^{\mu\dagger}\right) \to (A_{+}, A_{-}) \to (a, a^{*})$ iar $\delta(\Phi)$ este functionala Dirac care exprima constrangerea Gauss notata pentru simplitate $\Phi(\phi, A_{\mu}) = 0$. Urmatoarele asocieri par a se impune

$$
\frac{N!}{\prod\limits_i N_i^{+}!} \to \int^{(1)} D[\phi_1] D[\phi_1^{*}] D[a] D[a^{*}] \exp\left\{ i\int d^2x\ 4\rho_1 \left| \frac{\partial}{\partial z}\ln\phi_1 + a\right|^2 \right\} \qquad (49)
$$

si

$$
\frac{N!}{\prod\limits_i N_i^{-}!} \to \int^{(2)} D[\phi_2] D[\phi_2^{*}] D[a] D[a^{*}] \exp\left\{ i\int d^2x\ 4\rho_2 \left| \frac{\partial}{\partial z}\ln\phi_2 - a\right|^2 \right\} \qquad (50)
$$

Indicii superiori (1) si (2) au semnificatia ca integarile sunt extinse pe sub-spatii de functii restranse de legea Gauss, ceea ce inseamna ca cele doua integrale nu sunt factori independenti in produsul ce conduce la (48). Acelasi lucru se petrece in cazul Eq.(11) unde cei doi factori sunt conectati prin constrangerile $\sum\limits_i N_i^{+} = N^{+} = N$ si $\sum\limits_j N_j^{-} = N^{-} = N$ precum si de constanta a energie fixate E. In FT auto-dualitate impune in chip natural egalitatea dintre numarul total de vortexuri pozitive si respectiv negative.

Constrangerea Gauss este

$$
\delta(\Phi) \equiv \delta\left[(\partial_{+}a + \partial_{-}a^{*}) - \frac{1}{\kappa}(\rho_1 - \rho_2) \right] \qquad (51)
$$

Functia de partitie este calculata luand solutia saddle point, ceea ce este echivalent cu Eqs.(31) si (32) conducand la *sinh*-Poisson: argumentul in (51) al functiilor δ se anuleaza.

In Eq.(49) membrul stang este numarul de configuratii posibile pe care setul de obiecte punctuale N^{+} indiscernabile le poate lua in starea i, *i.e.* cu numere de ocupare N_i^{+}. In membrul drept avem, la SD cand exponentul este zero, volumul sub-spatiului functional format de starile ce verifica prima ecuatie ce conduce la SD. Acelasi lucru este valabil si pentru cea de-a doua ecuatie, pentru N^{-}. Vidul este starea in care energia sistemului discret este data de

$$
N_i^{+} = N_i^{-} \qquad (52)
$$

ceea ce corespunde vidului din FT la $\rho_i = 1$. Aceasta este echivalent cu formarea de perechi de vortexuri opuse.

5 Ecuatiile modelului de teorie de camp (FT) pentru starile din vecinatatea relaxarii (auto-dualitatii)

5.1 Ecuatiile pentru componentele de materie

Ecuatiile Euler - Lagrange ce rezulta din Lagrangianul (15) sunt

$$iD_0\phi = -\frac{1}{2m}D_+D_-\phi - \frac{1}{4m\kappa}\left[\left[\phi,\phi^\dagger\right],\phi\right] \tag{53}$$

si respectiv ("constrangerea" Gauss)

$$\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = iJ^\mu \tag{54}$$

Deduceri foarte detaliate se afla in Appendix D in [17]. Aceste ecuatii sunt valabile in general, nu doar la auto-dualitate. In contrast cu aceleaa de la SD, aceste ecuatii sunt dificil de utilizat, deoarece solutii explicite nu sunt disponibile. Vom incerca sa investigam ecuatiile intr-un regim care este aproape de starea de SD. Vom retine dependenta de timp (care in mod necesar este lenta deoarece suntem aproape de stationaritate $\partial_0 \to 0$) mentinem ρ_1 si ρ_2 nelegate ($\rho_1\rho_2 = 1$ exista doar la SD) si adoptam aceeasi ipoteza de structura algebrica ca pentru starile SD.

Incepem prin a exaamina ceea ce se poate obtine din constrangerea Gauss deoarece este intotdeauna valabila

$$F_{12} = \frac{i}{2\kappa}\left[\phi,\phi^\dagger\right] \tag{55}$$

Prin ea putem sa obtinem expresii formale pentru componentele potentialului de etalonare $A_{x,y}$. Inserand structura algebrica adoptata, in memmrul stang avem

$$\begin{aligned} F_{12} &= \partial_x A_y - \partial_y A_x + \left[A_x, A_y\right] &(56)\\ \overline{F}_{12} &= \partial_x \overline{A}_y - \partial_y \overline{A}_x &(57)\end{aligned}$$

unde prin *bar* notam amplitudinide-a lungul generatorului grupului de gauge H, $A_\pm = \overline{A}_\pm H$ si combinatiile lor. Constrangerea Gauss devine o ecuatie pentru campul vectorial $\overline{\mathbf{A}} \equiv \left(\overline{A}_x, \overline{A}_y\right)$

$$curl\overline{\mathbf{A}} = \frac{i}{2\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right) \tag{58}$$

Solutia generala contine rotationalul unui camp vectorial pe care il luam ca $\frac{i}{4}g\widehat{\mathbf{e}}_z$ unde g este o functie scalara, plus gradientul unei alte functii scalare, $\frac{i}{2}h$.

$$\overline{A}_x = \frac{i}{4}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}h \ , \ \overline{A}_y = -\frac{i}{4}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}h \tag{59}$$

Daca am resui sa gasim o functie scalara g care sa verifice

$$-\frac{1}{4}i\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{4}i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{i}{2\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right) \tag{60}$$

sau

$$\Delta g = -\frac{2}{\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right) \tag{61}$$

atunci legea Gauss este verificata si dispunem de expresii formale pentru $\overline{A}_{x,y}$ in termeni de $\rho_1 - \rho_2$. Ceea ce am facut a fost doar sa eliminam componentele campului de gauge in vederea reducerii problemei la numai ecuatii pentru campul de materie, Eq.(53).

Ecuatia de miscare (53) este detaliata si, egaland coeficientii fiecarui generator $E_\pm$ obtinem doua ecuatii pentru functiile scalare $\phi_{1,2}$. Aceste calcule sunt prezentate detaliat in Appendix E din [17]. Ecuatia ce rezulta de la E_+ este

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - 2ib\phi_1 \\ = \ & -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(a - a^*\right)}{\partial x}\phi_1 + \left(a - a^*\right)\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right] \\ & -\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\left(a - a^*\right) - \frac{1}{2}\left(a - a^*\right)^2\phi_1 \\ & -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \frac{i}{2}\left[\frac{\partial\left(a + a^*\right)}{\partial y}\phi_1 + \left(a + a^*\right)\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right] \\ & -\frac{i}{2}\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\left(a + a^*\right) + \frac{1}{2}\left(a + a^*\right)^2\phi_1 \\ & -\frac{1}{m\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right)\phi_1 \end{aligned} \tag{62}$$

Ecuatia ce rezulta de la E_-.

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + 2ib\phi_2 \\ = \ & -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(a - a^*\right)}{\partial x}\phi_2 + \left(a - a^*\right)\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right] \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\left(a - a^*\right) - \frac{1}{2}\left(a - a^*\right)^2\phi_2 \\ & -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial\left(a + a^*\right)}{\partial y}\phi_2 + \left(a + a^*\right)\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right] \\ & +\frac{i}{2}\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\left(a + a^*\right) + \frac{1}{2}\left(a + a^*\right)^2\phi_2 \\ & +\frac{1}{m\kappa}\left(\rho_1 - \rho_2\right)\phi_2 \end{aligned} \tag{63}$$

Pe baza celor doua ecuatii vom deduce ecuatii pentru cele doua amplitudini $\rho_{1,2}$ si de asemenea pentru combinatiile lor $\rho_1 \pm \rho_2$. Pentru aceasta mai intai introducem expresii explicite pentru cele doua functii ϕ_1 si ϕ_2,

$$\phi_1 = \sqrt{\rho_1} \exp(i\chi) = \exp\left(\frac{\psi_1}{2} + i\chi\right) \tag{64}$$

$$\phi_2 = \sqrt{\rho_2} \exp(i\eta) = \exp\left(\frac{\psi_2}{2} + i\eta\right) \tag{65}$$

Este acum util sa consideram cazul SD, pentru a putea obtine o orientare asupra structurii ecuatiilor pe care vrem sa le deducem si care trebuie sa conduca ele-insele la SD. La SD avem un singur ψ, $\rho_1 = \exp(\psi) = \rho_2^{-1}$ si

$$a = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \phi_1 = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi}{2} + i\chi\right) \tag{66}$$

$$a = \frac{\partial}{\partial z} \ln \phi_2 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi}{2} + i\eta\right) \tag{67}$$

Expresiile potentialului de etalonare la SD

$$A_x = \frac{1}{2}(a - a^*) H = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) H = \frac{i}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) H \tag{68}$$

$$A_y = \frac{i}{2}(a + a^*) H = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) H = \frac{i}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) H \tag{69}$$

$$A_0 = -\frac{i}{4m\kappa}\left[\phi, \phi^\dagger\right] = -\frac{i}{4m\kappa}(\rho_1 - \rho_2) H = \left(\frac{i}{8m}\omega\right) H \equiv bH \tag{70}$$

Obtinem indicatia ca la SD componentele (x, y) ale potentialului de gauge sunt pur imaginaresi ca prima parte da expressilor este rezultata din *curl* aplicat pe $\psi\widehat{\mathbf{e}}_z$. Aceasta parte este viteza fizica, $-\nabla\psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z$, daca ψ este functia de curent (streamfunction). Deoarece toate componentele potentialului de gauge sunt in spatiul algebrei de-a lungul generatorului Cartan H, partea de cenvectie din derivarile covariante $[A_\pm,]$ nu afecteaza continutul algebric al campului de materie ϕ, care este considerat o combinatie de ceilalti - ladder - generatori.

Revenind la Eqs.(62) si (63) introducem definitiile

$$v_x^{(1)} = \frac{2\overline{A}_x}{i} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\ , \ v_y^{(1)} = \frac{2\overline{A}_y}{i} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \tag{71}$$

$$v_x^{(2)} = -\frac{2\overline{A}_x}{i} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\ , \ v_y^{(2)} = -\frac{2\overline{A}_y}{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{72}$$

si luand in considerare ca $b + b^* = 0$ deducem ecuatiile pentru suma si diferenta $\rho_1 \pm \rho_2$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 - \rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x^{(1)}\rho_1 - v_x^{(2)}\rho_2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y^{(1)}\rho_1 - v_y^{(2)}\rho_2\right] = 0 \tag{73}$$

si similar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1+\rho_2)+\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x^{(1)}\rho_1+v_x^{(2)}\rho_2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[v_y^{(1)}\rho_1+v_y^{(2)}\rho_2\right]=0 \tag{74}$$

(Calculele detaliate se afla in Appendix E din [17]). Aceste ecuatii generalizeaza pe acelea din modelul Abelian din Ref.[6].

Deducem de asemenea ecuatiile pentru cele doua functii $\rho_{1,2}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1+div\left(\mathbf{v}^{(1)}\rho_1\right)=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial t}\rho_2+div\left(\mathbf{v}^{(2)}\rho_2\right)=0 \tag{75}$$

5.2 Campurile de viteze

Primul camp de viteze

$$\mathbf{v}^{(1)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}g\times\widehat{\mathbf{e}}_z+\boldsymbol{\nabla}(h+\chi) \tag{76}$$

si al doilea camp de viteze deduse anterior

$$\mathbf{v}^{(2)}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}g\times\widehat{\mathbf{e}}_z+\boldsymbol{\nabla}(-h+\eta) \tag{77}$$

difera prin fazele functiilor ϕ_1 si ϕ_2, *i.e.* prin χ si η. Vom cauta sa aflam mai multe despre campurile de viteze $\mathbf{v}^{(1,2)}$ luand limita la auto-dualitate SD.

Solutia formala a ecuatiei

$$curl\overline{\mathbf{A}}=\frac{i}{2\kappa}(\rho_1-\rho_2)$$

este exprimata ca

$$\overline{A}_x = -\frac{\partial}{\partial y}\int d\mathbf{r}'G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left\{\frac{i}{2\kappa}\left[\rho_1(\mathbf{r}',t)-\rho_2(\mathbf{r}',t)\right]\right\} +gauge\ term \tag{78}$$

$$\overline{A}_y = \frac{\partial}{\partial x}\int d\mathbf{r}'G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left\{\frac{i}{2\kappa}\left[\rho_1(\mathbf{r}',t)-\rho_2(\mathbf{r}',t)\right]\right\} +gauge\ term \tag{79}$$

iar la SD, unde avem un singur ψ,

$$\rho_1(\mathbf{r}',t)-\rho_2(\mathbf{r}',t)\to\frac{-\kappa}{2}\omega(x,y)=-\frac{\kappa}{2}\Delta\psi(x,y)$$

Putem alege termenii de gauge incat sa canceleze gradientii in Eqs.(59). Alternativ, putem utiliza Eq.(68)

$$v_x^{(1)}=\frac{2}{i}\overline{A}_x+\frac{\partial\chi}{\partial x}\to\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\ v_y^{(1)}=\frac{2}{i}\overline{A}_y+\frac{\partial\chi}{\partial x}\to-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{80}$$

Similar, pentru al doilea camp de viteza

$$v_x^{(2)} = -\frac{2}{i}\overline{A}_x + \frac{\partial\eta}{\partial x} \to -\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \ v_y^{(2)} = -\frac{2}{i}\overline{A}_y + \frac{\partial\eta}{\partial y} \to \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{81}$$

La SD amandoua campurile de viteze devin cu zero-divergenta $\nabla\cdot\mathbf{v}^{(1)} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{v}^{(2)} = 0$ si sunt opuse ca sens

$$\mathbf{v}^{(2)} = -\mathbf{v}^{(1)} \tag{82}$$

Daca admitem ca aceste proprietati sunt aproximativ indeplinite is starile din vecinatatea (dar nu exact la -) SD, obtinem

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 - \rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x^{(1)}(\rho_1 + \rho_2)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y^{(1)}(\rho_1 + \rho_2)\right] \approx 0 \tag{83}$$

si respectiv

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x^{(1)}(\rho_1 - \rho_2)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y^{(1)}(\rho_1 - \rho_2)\right] \approx 0 \tag{84}$$

Dupa inlocuirea expresiei de la SD pentru $\mathbf{v}^{(1)}$ si luand in considerare ca la SD $\rho_1 = \exp(\psi)$, $\rho_2 = \exp(-\psi)$, vedem ca amandoua ecuatiile devin simple expresii de stationaritate $\partial(\rho \pm 1/\rho)/\partial t = 0$.

5.3 Curentul campului de materie

Expresiile curentului de materie ne vor ajuta sa demonstram ca formularea ca teorie de camp reproduce, ca limita continua, ecuatiile vortexurilor punctuale Eqs.(9). In teoria campului J^μ este calculat dupa proceduri standard

$$J^0 = \left[\phi, \phi^\dagger\right] \tag{85}$$

$$J^i = -\frac{i}{2m}\left(\left[\phi^\dagger, D_i\phi\right] - \left[(D_i\phi)^\dagger, \phi\right]\right) \tag{86}$$

Folosind ipoteza structurii algebrice (*algebraic ansatz*) pentru ϕ si A_μ obtinem urmatoarele expresii

$$\begin{aligned} m\overline{J}^x &= -\rho_1\frac{\partial\chi}{\partial x} + \rho_2\frac{\partial\eta}{\partial x} + i(a - a^*)(\rho_1 + \rho_2) \\ &= -\rho_1\frac{\partial\chi}{\partial x} + \rho_2\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{2\overline{A}_x}{i}(\rho_1 + \rho_2) \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} m\overline{J}^y &= -\rho_1\frac{\partial\chi}{\partial y} + \rho_2\frac{\partial\eta}{\partial y} - (a + a^*)(\rho_1 + \rho_2) \\ &= -\rho_1\frac{\partial\chi}{\partial y} + \rho_2\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{2\overline{A}_y}{i}(\rho_1 + \rho_2) \end{aligned} \tag{88}$$

$$\overline{J}^0 = \rho_1 - \rho_2 \tag{89}$$

in care potentialele de gauge $\overline{A}_{x,y}$ sunt prezente. (Detaliile calculelor sunt prezentate in Appendices E si F ale Ref.[17]).

Acum examinam aceste expresii in vecinatatea SD. Din prima ecuatie de auto-dualitate $D_-\phi = 0$ obtinem combinatiile dintre a si a^* ca

$$a + a^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \tag{90}$$

$$a - a^* = i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \tag{91}$$

Mai departe, luam $\rho_1 \to \exp(\psi)$ si $\rho_2 \to \exp(-\psi)$. La SD fazele lui ϕ_1 si ϕ_2 sunt opuse $\chi = -\eta$. Deci se obtine, in apropierea starii SD

$$m\overline{J}^x \approx -(\rho_1 + \rho_2)\, v_x^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{\kappa}{4}\frac{\partial}{\partial y}\omega \tag{92}$$

si

$$m\overline{J}^y \approx -(\rho_1 + \rho_2)\, v_y^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) = -\frac{\kappa}{4}\frac{\partial}{\partial x}\omega \tag{93}$$

La aceasta adaugam formula aproximativa

$$\overline{J}^0 \approx \rho_1 - \rho_2 = -\frac{\kappa}{2}\omega \tag{94}$$

Formulele rezultate pot fi scrise astfel

$$\overline{J}^x \quad \to \quad -\frac{1}{2m}(\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{95}$$

$$\overline{J}^y \quad \to \quad \frac{1}{2m}(\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{96}$$

si notam ca aceste expresii pentru $\overline{J}^{x,y}/(\rho_1 + \rho_2)$ coincid la SD cu ecuatiile limitei continui a setului discret de vortexuri punctuale, Eqs.(9).

6 Discutie

Calcule detaliate referitoare la proprietatile campurilor vitezelor si la curenti pot fi gasite in Appendixes A - G din [17]. Se poate deduce a formularea de teorie de camp dispune de un fundament analitic consistent ce permite sa se exploreze aplicatii si/sau extensii.

6.1 Cateva comentarii

Modelul de teorie de camp se bazeaza pe o reprezentare duala a aceluiasi obiect fizic: vorticitatea. Este densitatea de materie $J^0 = \left[\phi, \phi^\dagger\right]$ si este campul magnetic $F_{12} = B \sim \left[\phi, \phi^\dagger\right]$; legea Gauss le constrange sa fie egale. Aceasts reprezentare expandeaza neliniaritatea din Eq.(1) dar o exprima intr-un mod diferit: repulsia generata de potentialul de gauge intre elemente de vorticitate (ceea ce apare ca o componenta din partea cinetica a energiei) este echilibrata de atractia de tip δ-functie intre doua corpuri reprezentat de ultimul termen din Lagrangian (aceasta este adevarat pentru vortexuri de acelasi semn; in plus trebuie sa fi facut optiunea Eq.(25)). Aceasta permite ca la auto-dualitate gradul diferential al ecuatiilor de miscare sa fie redus cu o unitate: prima ecuatie SD (26) este de ordinul intai, in contrast cu Eq.(17) care este de ordinul doi.

Formularea fluidului Euler ca o teorie de camp releva faptul ca esenta auto-organizarii este topologica. Desi este mai putin vizibila in cazul (prezent) Euler, este explicit in cazul modelelor FT pentru stari cu vorticitate de un unic semn (leading to the Liouville equation), etc. unde starile asimptotice sunt aplicatii intre variatati compacte iar energia este limitata inferior de un terme ce se constituie ca un numar intreg multiplicand o unitate de flux, fluxul unui singur vortex. Deoarece $B \sim \omega$ sugestia este clara: doar vorticitatea poate cunoaste auto-organizare spontana, combinatii cum ar fi vorticitatea potentiala nu au aceasta proprietate. Esentialmente B si ω sunt cantitati de natura fluxului, trebuie sa ni le reprezentam ca $Bdx \wedge dy$ si $\omega dx \wedge dy$, adica sunt forme diferentiale de ordinul doi. Integrala pe plan este tocmai gradul topologic al aplicatiilor mentionate inainte. Notam totusi ca pentru fluide cu domeniu de interactie scurt (short range interaction) cum ar fi $2D$ plasma si $2D$ atmosfera, auto-organizarea (indusa de fapt de componenta ω) este aproximativa iar vorticitatea potentiala domina dinamica prin theorema Ertel.

6.2 Stari premergatoare auto-dualitatii, in care parametrii nu sunt constransi sa verifice Eq.(25)

Termenul CS si termenul de auto-interactie a materiei se combina dand o contributie la energie, al doilea termen din Eq.(21). Atunci cand parametrii (coefficientul lui CS respectiv al auto-interactiei materiei) nu sunt alesi asa cum sa arata in Eq.(25) energia sistemului nu este zero chiar daca adoptam conditia specifica starii SD $D_- \phi = 0$. Apropierea de starea SD inseamna ca acesti doi parametri sa devina progresiv egali. Comparat cu tratarea de pana acum, aceasta situatie da un alt sens expresiei “a fi aproape de auto-dualitate” dar o formulare de tip FT ramane inca sa fie elaborata. Cateva aspecte calitative ale unei asemenea descrieri FT sunt totusi deja disponibile si ne permit sa facem o paralela cu evolutia fluidului *fizic* in fazele tarzii ale procesului de apropiere de stationaritate data de solutiile Eq.(2).

Este stiut (si a fost reamintit pe scurt anterior) ca in fazele avansate ale relaxarii fluidelor (echivalent, de auto-organizare a vorticitatii) procesul de separare a elementelor de vorticitate de semne opuse si coalescenta a vortexurilor de acelasi semn conduce la formarea unor vortexuri mesoscopice de ambele semne. Miscarea lor in plan este mult mai lenta decat rata de rotatie a fluidului pe liniile de curent inchise. Echivalentul FT al acestei situatii este ca termenul de energie

$$\delta E \equiv \left(-\frac{g}{2}+\frac{1}{4m\kappa}\right)\mathrm{tr}\left(\left[\phi^{\dagger},\phi\right]^{2}\right) \tag{97}$$

este foarte mic. Fuziunea (contopirea) vortexurilor mesoscopice este posibila datorita reconexiunilor liniilor de curent ce sunt mediate de disipare. In fluidul fizic, un asemenea eveniment se reflecta in aceea ca o parte din energue este pierduta prin disipare iar o parte din energie legata de miscarea centrelor vortexurilor mesoscopice se transfera in miscare pe liniile de curent. In FT trebuie sa vedem termenul (97) descrescand catre zero.

Atunci cand cei doi parametri nu sunt egali exista interactie intre vortexuri. Aceasta a fost studiata pentru sisteme FT similare ([18], [16], [19], [20]). Atunci cand sistemul este foarte aproape de SD se poate presupune ca vortexurile mesoscopice nu sunt foarte diferite de vortexurile SD exacte. Deci se introduc solutii exacte ale Eq.(2) in expresia energiei (21), dar fara a presupune SD (Eq.(26) and (25)). Luand drept parametri pozitiile centrelor vortexurilor exacte la SD, este posibil sa se determine forta de interactie din variatia energiei la acesti parametri. Rezultatul depinde in mod decisiv de semnul termenului (97). Este de asemenea posibil sa se deduca miscarea relativa a vortexurilor din curgerea geodesica pe variatatea generata de pozitiile lor in plan [21]. Acest argument functioneaza pentru mai multe sisteme FT dar aplicarea lui la cazul prezent nu este imediata: aici avem vortexuri pozitive si negative iar energia este marginita inferior de $E=0$. Anticipand o analiza mai atenta mentionam argumentul asa cum este el relevant pentru cazul Euler. La SD (*i.e.* $g-1/\left(2m\kappa\right)=0$) energia totala este zero si solutia consta dintr-un dipol. Aceasta solutie exacta aproximeaza pe aceea ce corespunde etapei anterioare din evolutia fluidului, in care existau doua vortexuri mesoscopice de semne opuse aflate intr-o miscare lenta. Notam ca atunci cand $\delta E<0$ (in Eq.(97)) aceaasta energie sumplimentara fiind negativa inseamna ca exista atractie intre vortexuri. Spunem cca exista o predominanta a termenului Chern-Simons (adica parametrul κ este mare) din care apare al doilea termen din paranteza. Calitativ se poate spune ca evolutia catre SD trebuie sa implice descresterea acestei energii de atractie, *i.e.* la orice reconexiune o anumita cantitate din termenul Chern-Simons ($\sim$ elicitate) trebuie sa fie suprimata. Deoarece stim ca la SD partea Chern-Simons din Lagrangian este

$$\mathcal{L}_{CS}^{SD}=-\kappa\mathrm{tr}\left(A_0F_{12}\right)=-\kappa\frac{1}{16m}\omega^2$$

putem sa reformulam, spunand ca la fiecare reconexiune o anumita cantitate de enstrofie este eliminata. Aceasta pare a fi compatibil cu simularile numerice, unde evolutia catre ordine este asociata descresterii enstrofiei.

Intelegem ca apropierea de SD si eliminarea excesului de energie (97) implica descresterea continutului topologic care este reprezentat de termenul Chern-Simons. Aceasta trebuie sa fie mediat de mecanismul disipativ, care lispeste din formularea de baza (15). Putem sa gasim o sugestie asupra necesarei extensii a modelului prin referire la *baryogenesis*, care implica o schimbare a gradului topologic reprezentat de Chern-Simons prin tranzitii intre stari care au continut topologic distinct [22], [23]. Nu este insa posibila o aplicare naiva a acestui procedeu, deoarece nu avem vid Higgs si deci nu exista nici solutie *sphaleron*. Un studiu al acestei probleme este in curs.

6.3 Transformarile conforme si corespondentele intre solutiile ecuatiilor de miscare din FT

Modelul FT se bucura de invarianta conforma, la fel ca si modelul din care provine, adica fluidul Euler $2D$ (1): nu exista nici un parametru de natura lungimii care sa fie intrinsec sistemului fizic si deci nici modelelor, iar lungimea laturii patratului din plan L este doar un parametru arbitrar. Lagrangianul (15) este invariant la transformari conforme [15], [24], [16] iar generatorii acestor transformari verifica relatia urmatoare (t este timpul)

$$\mathcal{E}t^2 - 2\mathcal{D}t + \mathcal{K} > 0$$

unde $\mathcal{E}$ este energia *i.e.* integrala Eq.(24), $\mathcal{D}$ si $\mathcal{K} > 0$ sunt generatorii dilatarii si a transformarilor conforme speciale, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}/(1+at)$, unde $a = \text{const.}$, introduse in Ref.[15]. Transformarile conforme permit sa se gaseasca solutii noi, dependente de timp, ale ecuatiilor de miscare (17), pornind de la solutii statice ale ecuatiei la SD (2). Aceste noi solutii au energia $E > 0$ ceea ce inseamna ca sistemul nu poate sa evolueze in mod spontan ci are nevoie de input de energie din exterior. Fiecare transformare conforma este o corespondenta in spatiul functiilor care conecteaza solutii ale (17). Nu este in mod necesar o evolutie dinamica a sistemului dar, fiindca fiecare functie obtinuta prin transformare conforma este un extremum al actiunii, traiectoria din spatiul functiilor ce conecteaza aceste solutiile reprezinta modul cel mai economic pentru sistem de a accesa un tip particular de dinamica.

Asa cum este studiat in [25] atunci cand $\mathcal{E} > 0$ si $\mathcal{D} > \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{K}}$ exista un timp finit t^* astfel incat pentru $t \to t^*$ amplitudinea solutiei ϕ devine zero oriunde pe plan cu exceptia lui $r = 0$ unde diverge. In particular, atunci cand sistemul este initializat in acest domeniu de parametri ($\mathcal{E} = 0, \mathcal{D} > 0, \mathcal{K} > 0$) cele doua vortexuri de semn opus evolueaza catre profile cuasi-singulare, foarte concentrate. Atunci cand nu este evolutie spontana catre singularitate, notam ca, pentru o solutie uni-dimensionala a (2), profilul $\psi(x)$ poate fi pus in corespondenta cu o alta solutie $\psi'(x,t)$ care, pentru timp t fix si pentru $a > 0$ este mai ingusta, mai concentrata in jurul axei de simetrie $x = 0$. Viteza $v'_y(x,t) = -d\psi'/dx$ este mai mare si este nevoie de energie din exterior pentru ca sistemul sa evolueze de la solutia statica catre cea dependenta de timp. Forfecarea (shear) creste si, cu numai un input moderat de energie din exterior, stratul de curgere poate sa devina instabil la Kelvin-Helmholtz.

6.4 Dinamica fluidului fizic in $2D$ si reflectarea ei in formularea de teorie de camp

Fluidul bidimensional ideal incompresibil evolueaza de la o stare turbulenta catre o stare stationara, inalt ordonata, prin procese intermediare de fuziune de vortexuri si prin concentrarea vorticitatii, separat dupa cele doua semne, in doua vortexuri de scala larga. Evolutia are doua componente:

(1) miscari izotopologice ce au loc cu pastrarea tuturoro liniilor de curent si cu conservarea exacta a energiei;

(2) evenimente rapide constand din ruperea si reconectarea liniilor de curent, conducand la o schimbare in topologia curgerii. In particular, fuziunea de vortexuri, *i.e.* generarea de scale largi ale curgerii din doua vortexuri de dimensiune mai mica atunci cand are loc intalnirea lor este doar posibila prin reconexiune. Un mecanism disipativ este necesar, asa cum e viscozitatea moleculara sau ciocnirile. Cu toate acestea, cantitatea de enerie care este pierduta prin caldura in acest proces este foarte mica si energia totala este aproximativ conservata. Evenimentele ce constau in reconexiune (echivalent: evenimentele disipative) au loc intr-o regiune spatiala de dimensiune foarte redusa (fractala) [26]. Importanta principala a reconexiunilor este in mod evident re-aranjarea topologica pe care acestea le fac posibile. In acest mod sistemul se apropie de starea de SD care are o structura topologica simpla [2].

Daca excludem orice proces disipativ si initializam intr-o stare in care energia nu este minimala (adica nu este zero la SD) atunci fluidul continua sa se miste fara a se putea opri vreodata in stare stationara. Aceasta se intampla deoarece procesele care i-ar permite sa aiba acces la stari de energie mai joasa, si in final cea mai joasa posibil, adica starea SD, sunt interzise deoarece reconexiunile nu sunt posibile.

Pentru o energie totala pozitiva foarte mica sistemul are doar cateva vortexuri mesoscopice ce se deplaseaza lent, deoarece starea aceasta precede organizarea completa intr-un dipol stationar solutie a Eq.(2). Deci miscarea poate fi vazuta ca o rotatie rapida in vortexuri si o deplasare lenta a centrelor lor. In starile de platou de energie ce constau din deplasari izotopologice (intre doua procese de reconexiune) sistemul creaza acumulari de linii de curent in cateva regiuni inguste si aceasta genereaza conditiile favorabile pentru reconexiune. Aceste regiuni inguste sunt caracterizate prin valori foarte inalte ale gradientilor de vorticitate si orice disipare, daca exista, va face posibila reconexiunea. Starea asimptotica SD doar consta in deplasari vorticale pe linii de curent fara nici o miscare a centrelor lor.

Functionala actiune se reduce la stationaritate la patratul unei expresii de campurile (ϕ, A_μ) iar starile ce extremizeaza actiunea sunt identificate luand egale cu zero aceste expresii. Ele se caracterizeaza prin egalitatea vorticitatii totale pozitive respectiv negative, cu toate ca Lagrangianul nu include aceasta explicit de la inceput. Prin comparatie, abordarea statistica bazata pe tratarea variationala a entropiei trebuie sa impuna aceste proprietati prin multiplicatori Lagrange ce se adauga la extremizarea functionalei entropie.

Referitor la *temperatura negativa* determinata in Taylor [27], s-a aratat de catre Joyce si Montgomery [13] si de catre Edwards si Taylor [12] ca pragul energiei este $E = 0$ si pentru orice energie *pozitiva* temperatura este negativa. Modelul FT intr-adevar gaseste ca starea SD are $E = 0$ ceea ce trebuie interpretat astfel: energia corespunde situatiei in care nu exista nici o miscare a centerlor vortexurilor ce raman in faza avansata de organizare (dipol) si singura miscare ste rotatia pe liniile de curent ale ceor doua vortexuri. Deoarece sistemul de vortexuri punctuale este pur cinematic, energia deplasarii de-a lungul liniilor de curent este zero. Singura modificare in functia de materie ϕ este data de modificarea fazei, cauzata de potentialul $A_{x,y}$. Aceasta corespunde rotatiei fluidului pe liniile de curent ale dipolului. Este doar o crestere indefinita a fazei si aceasta este exprimata de $D_{-}\phi = 0$.

7 Concluzii referitoare la sistemele cu interactie de scala mare

Formalismul de teorie de camp pentru fluidul Euler gaseste starile asimptotice, inalt organizate, sunt datorate proprietatii de auto-dualitate. Formalismul deduce intr-un mod foarte transparent ecuatia *sinh*-Poisson. Rezulta, printre altele, ca starile care au fie $E \neq 0$ fie nu sunt dublu periodice, ori nu au un echilibru exact intre vorticitatea pozitiva si negativa, $\int d^2 r\omega \neq 0$ nu pot fi stationare. Aceasta decurge din proprietatea sistemului de ecuatii de auto-dualitate ce consta in aceea ca solutiile lor, necesarmente stationare, contin de fapt toate solutiile stationare ale sistemului de ecuatii general.

Faptul ca starile asimptotice exista datorita auto-dualitatii (fapt dedus de formularea de teorie de camp) poate ajuta sa se inteleaga mai bine caracterul universal al procesului fizic de concentrare a vorticitatii [28], [29]. In fluide cu proprietati asemanatoare (atmosfera $2D$, plasma in camp magnetic) sunt observate stari de curgere inalt organizate [30]. Trebuie sa ne amintim ca evolutia fluidului Euler $2D$ catre structura coerenta [solutie a Eq.(2)] are loc in absenta gradientilor de presiune, gradientilor de temperatura. a convectiei termice, a fortelor centrifuge, etc. Nimic nu a fost necesar pentru ca sa aiba loc separarea vorticitatii si concentrarea ei , cu exceptia naturii speciale a neliniaritatii ce sustine cascada inversa, adica tendinta intrinseca catre auto-organizare a curgerii catre scale spatiale largi. Acest proces este similar cu tranzitia de faza Widom - Rowlinson prin universalitatea sa si prin faptul ca, in afara ecuatiei insasi, inputul conceptual este cuasi-inexistent. Atunci cand se descrie formarea de sctructuri, de exemplu ciclonul tropical sau tornadele in atmosfera, sau celulele convective in plasma, necesara folosire a ecuatiilor de conservare drept ecuatii dinamice nu trebuie sa ne faca sa uitam ca in interiorul structurii finale se gaseste de asemenea o structura universala. Aceasta tendinta catre auto-organizare este revelata sau este mai vizibila la relaxare dar ea de fapt nu depinde de nici o circumstanta particulara. Dea semenea se poate ca fortele externe si disiparile sa altereze substantial structura de curgere ideala a auto-organizarii. Dar nu exista nici o posibilitate de a o suprima., tendinta spre auto-organizare va fi totdeauna prezenta. Putem neglija auto-organizarea pe baze de evaluare a ponderii sale cantitativa, dar nu o putem ignora [31], [32], [33].

Cu toate ca formularea de teorie de camp pentru fluidul Euler $2D$ propune o perspectiva interesanta asupra dinamicii fluidelor, are si unele limitari: nu poate sa reprezinte disiparea intr-un mod simplu deci evolutiile descrise de teoria de camp sunt esentualmente deplasari izo-topologice. Daca energia initiala nu este zero, sistemul nu nu va atinge starea de auto-dualitate si deci nici solutii ale ecuatiei *sinh*-Poisson.

Interesul pentru formularea FT poate sa se justifice si prin dezvoltarile pe care le face posibile: conexiunea cu suprafete de curbura medie constanta (in spatiul euclidean $\mathbf{E}^3$) pune in relatie curgerile la SD cu cate o suprafata; procedeul larg studiat numit *contour dynamics* poate fi asociat existentei unei suprafete Riemann ce este solutie a unei extensii supersimetrice a modelului FT prezentat aici; de asemenea exista o conexiune intre metrica Anti-deSitter si structura geometric-algebrica ce se afla la baza auto-dualitatii; etc. Toate acestea reprezinta domenii atractive de investigatie.

Part II
Sisteme fluide pentru care dinamica contine o scala spatiala intrinseca

Modele bi-dimensionale pentru dinamica fluidelor au un foaarte larg domeniu de aplicatii. Desi reprezinta aproximatii ale dinamicii reale $3D$, in multe cazuri descrierea $2D$ reda continutul esential al miscarii. Exemple in care aproximatia $2D$ este considerata ca ofera rezultate foarte bune sunt: plasma in camp magnetic, atmosfera planetara si dispozitive experimentale de studiu in laborator, numite "water tank".

Exista un motiv special pentru care aproximatia bi-dimensionala poate fi foarte aproape de realitate: comportamentul fluidelor in doua dimensiuni este deosebit, fiind determinat de cascada spectrala inversa, adica de transferul energetic in spectru de la scale spatiale mici catre scale spatiale mari, ceea ce inseamna organizarea curgerii la dimensiunea maxima care este oferita sistemului in $2D$. Chiar daca curgerea de baza are o geometrie $3D$ prezenta a unei cat de mici anizotropii care favorizeaza o directie spatiala (sa zicem z) induce o dominatie a curgerilor din planul transversal pe aceasta directie, (xy), si aceste curgeri vizibil se ordoneaza asa cum este de asteptat pentru curgerile bi-dimensionale. Caracterul dominant al curgerii in geometria redusa la $2D$ este sustinuta de teorema Taylor Proudman (in care factorul de anizotropie este axa rotatiei fluidului) (**Batchelor**), in atmosfera in care axa preferentiala este gravitatia (**McWilliams**) si in plasma, unde axa este campul magnetic extern.

Modelul pentru fluidul Euler conduce la ecuatia *sinh*-Poisson pentru functia de curent ψ. Teoria de camp traduce de fapt dinamica unui set discret de vortexuri punctuale ce interactioneaza in plan printr-un potential de scala spatiala lunga (Coulombian).

O clasa larga de fluide este caracterizata de existenta unei rotatii impuse din exterior: plasma in camp magnetic are giratia Larmor Ω_{ci} ; atmosfera aproximata ca sistem $2D$ are rotatia planetara, cu frecventa Coriolis f ; experimentele "water tank" studiaza vortexuri ce se formeaza pe un fluid aflat in rotatie. Daca incercam sa extindem corespondenta dezvoltata anterior dintre modelul fluidului fizic ($i.e.$ $\psi, \mathbf{v}, \omega$) si teoria de camp trebuie mai intai sa studiem modelul intermediar al vortexurilor punctuale discrete asa cum am procedat in cazul fluidului Euler. Dar acum apare o diferenta esentiala, deoarece vortexurile punctuale au o interactie de scala spatiala mica: prezenta rotatiei de baza schimba interactia dintre elementele de vorticitate, de la interactie de scala lunga ca la fluidul Euler, la o interactie de scala scurta. Pentru cazul atmosferei $2D$ ecuatiile au fost scrise de **Morikawa** care a introdus notiunea de vortex punctual geostrofic.

8 Modelul de teorie de camp pentru fluide $2D$ cu scala spatiala intrinseca

Mai multe referinte la modelul anterior pentru fluidul Euler fac mai usoara introducerea noului cadru de teorie de camp adaptat la scale spatiala intrinseca. Modelul de baza este Abelian, include termenul Chern-Simons si are auto-interactiune a campului de materie printr-un potential cu o neliniaritate polinomiala de grad 6 in $|\phi|$. Lagrangianul a fost propus intr-un context diferit de **Jackiw Lee Weinberg** si este

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} \\ &\quad + |D_\mu\phi|^2 \\ &\quad - V(\phi) \end{aligned} \tag{98}$$

unde potentialul $V(\phi)$ este

$$V(\phi) = \frac{e^4}{\kappa^2}|\phi|^2\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2 \tag{99}$$

Acest potential arata ca sistemul poate avea trei viduri reale distincte

$$\begin{aligned} \phi_{1,3} &= \pm v \\ \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Vidurile simetrice vor produce efectul Higgs prin care interactiunea sustinuta prin potentialul de gauge A_μ devine de scala spatiala scurta. Aceste doua viduri fac posibile solutii topologice pentru campul ϕ. Celalalt vid este simetric si produce solutii care nu au caracter topologic.

Derivata covarianta este

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi$$

Metrica Minkowski este aici aleasa astfel

$$\eta_{\mu\nu}^{JLW} = (1, -1, -1)$$

Ecuatiile de miscare ale modelului Abelian sunt

$$D^\mu D_\mu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*} \tag{100}$$

$$\frac{1}{2}\kappa \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = J^\alpha \tag{101}$$

unde curentul este

$$J^\mu = ie \left[\phi^* (D^\mu \phi) + \phi (D^\mu \phi)^*\right] \tag{102}$$

A doua ecuatie de miscare (101) are componenta temporala (Gauss law)

$$B = -\frac{1}{\kappa}\rho$$

De aici se poate determina componenta temporala a potentialului

$$A_0 = \frac{\kappa}{2e^2}\frac{B}{|\phi|^2} - \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial t}\arg(\phi)$$

Spectrul de excitatii consta din "particula" Higgs si fotonul masiv. Daca coeficientii sunt alesi in mod adecvat, maselel celor doua particule sunt egale

$$m_H = m_V = \frac{2e^2 v^2}{|\kappa|} \tag{103}$$

Aceasta provine din alegerea coeficientului potentialului ca e^4/κ^2.

In starile ce se dezvolta in vecinatatea vidului asimetric (Higgs) exista solutii topologice. La distante foarte mari campul scalar este practic egal cu valoarea de vid v:

$$\phi \simeq v \exp[i \arg(\phi)]$$

Faza campului scalar variaza la infinit in asa fel incat

$$\oint_{r=\infty} d\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \phi = 2\pi i n \tag{104}$$

Tensorul energie-impuls

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (D^\mu \phi)^* (D^\nu \phi) + (D^\mu \phi)(D^\nu \phi)^* \\ &\quad -g^{\mu\nu}\left[(D_\rho \phi)^* (D^\rho \phi) - V(\phi)\right] \end{aligned}$$

este obtinut re-exprimand mai intai actiunea ca intr-un spatiu curbat cu o metrica $g^{\mu\nu}$ si facand apoi variatia functionala a actiunii la aceasta metrica. Integrarea pe plan a componentei (00) ne da energia totala

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int d^2r \left[(D_0\phi)^* \left(D^0\phi\right) + (D_k\phi)^* \left(D^k\phi\right) + V(\phi) \right] \\ &= \int d^2r \left[\left(\frac{\partial |\phi|}{\partial t} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{4e^2} \frac{B^2}{|\phi|^2} + (D_k\phi)^* \left(D^k\phi\right) + V(\phi) \right]\end{aligned}$$

Aplicand procedeul Bogomolnyi se obtine

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int d^2r \left\{ \left[(D_x \pm iD_y)\,\phi \right]^* \left[(D_x \pm iD_y)\,\phi \right] \right. \\ &\quad + \left| \frac{\kappa}{2e} \frac{B}{\phi} \mp \frac{e^2}{\kappa} \phi^* \left(v^2 - |\phi|^2 \right) \right|^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial |\phi|}{\partial t} \right)^2 \right\} \\ &\quad \pm e v^2 \Phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \oint_{r=\infty} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{J}\end{aligned}$$

Integrala la frontiera este zero. La stationaritate se releva deci existenta unei limite inferioare a energiei

$$\mathcal{E} \geq e v^2 \Phi$$

Ecuatiile la auto-dualitate sunt

$$\begin{aligned}(D_x - iD_y)\,\phi &= 0 \\ eB &= -\frac{m^2}{2} \frac{|\phi|^2}{v^2} \left(1 - \frac{|\phi|^2}{v^2} \right)\end{aligned} \tag{105}$$

unde

$$\kappa = |\kappa|$$

si deducem asocierea fizica necesara intre masa (acceasi pentru fotonul masiv si pentru particula materiei) si raza Larmor

$$m \equiv \frac{2e^2v^2}{\kappa} = \frac{1}{\rho_s} \tag{106}$$

Deoarece

$$eA^k = \partial^k \arg(\phi) \pm \varepsilon^{kl} \partial_l \ln |\phi|$$

obtinem din a doua ecuatie de auto-dualitate

$$\Delta \ln \left(|\phi|^2 \right) = -m^2 \frac{|\phi|^2}{v^2} \left(1 - \frac{|\phi|^2}{v^2} \right)$$

Pentru normare se defineste

$$|\phi|^2 = \rho v^2$$

si deci ecuatia se formuleaza

$$\Delta \ln \rho = \frac{1}{\rho_s^2} \rho (\rho - 1)$$

Se face si o normalizare a coordonatelor spatiale

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = \rho_s (x, y)$$

$$\Delta \ln \rho + \rho (1 - \rho) = 0$$

In sfarsit, cu substitutia

$$\rho = \exp (\psi)$$

se obtine

$$\Delta \psi + \exp (\psi) [1 - \exp (\psi)] = 0$$

8.1 Solutii aproximative

Pentru valori mici ale lui ρ ecuatia devine

$$\Delta \ln \rho \approx -\rho$$

care este ecuatia Liouville. Solutiile acestei, care sunt cunoscute, ne vor permite sa obtinem solutii si pentru ecuatia noastra. Pentru Liouville se adopta forma solutiei care ne va conduce la o geometrie azimutal-simetrica, monopolara

$$\rho \simeq \frac{8p^2}{r^2} \frac{1}{\left[(r/r_0)^p + (r_0/r)^p \right]^2}$$

unde p este un parametru. Pentru un caz mai concret se ia

$$r_0 = 1$$

$$\rho = \frac{8p^2}{r^2} \frac{1}{(r^p + 1/r^p)^2} = 8p^2 \frac{r^{2p-2}}{(r^{2p} + 1)^2}$$

In regiunea apropiata de axa $r = 0$, *i.e.*

$$r \ll r_0$$

termenul r^{2p} de la numitor este foarte mic si poate fi neglijat. Luand $p=2$ avem

$$\rho(r) \approx (\mathrm{const}) \times r^2 + ...$$

si aceasta trebuie luata ca functie ce initializeaza calculul numeric al solutiei. Initializarea adoptata de Jackiw Lee Weinberg este

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho(r)} &= G_n r^n \\
&\quad - \frac{G_n^3}{8(n+1)^2} r^{3n+2} \\
&\quad + \frac{G_n^5}{8(2n+1)^2} r^{5n+2} \\
&\quad + ...
\end{aligned}$$

si aceasta este asociata expresiei generale a functiilor de camp ce trebuie determinate

$$\phi = v\sqrt{\rho}\exp(in\theta)$$

$$eA^k = \varepsilon^{kl}\frac{(\widehat{\mathbf{e}}_r)_l}{r}\left[a(r) - n\right]$$

JLW gasesc ca exista o valoare critica a coeficientului din expresia solutiei aproximative

$$G_n \to G_n^{cr}$$

pentru care functia $\sqrt{\rho(r)}$ are proprietatile asimptotice necesare

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho}|_{r\to 0} &\to 0 \\
\sqrt{\rho}|_{r\to\infty} &\to 1
\end{aligned}$$

Pentru $n=1$ (ceea ce coerspunde la $p=2$), solutia contine o unitate de vorticitate si se determina factorul critic $G_1^{cr} \simeq 0.5$. Seria aproximativa acum arata astfel

$$\sqrt{\rho} = \left(G_1^{cr}\right) r - \frac{\left(G_1^{cr}\right)^3}{8(2^2)} r^5 + \frac{\left(G_1^{cr}\right)^5}{8(3^2)} r^7 + ...$$

sau

$$\sqrt{\rho} \sim 0.5r - \frac{0.125}{32} r^5 + \frac{0.0312}{72} r^7 + ...$$

Am integrat numeric ecuatia diferentiala pentru functia monopolara $\rho(r)$ pornind de la dezvoltarea in serie de r din vecinatatea centrului $r=0$.

Din acest $\rho(r)$ determinat numeric, se poate calcula functia de curent ψ

$$\psi = \ln\rho$$

viteza azimutala si vorticitatea

$$\begin{aligned}
v_\theta &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
\omega &= \rho(\rho - 1)
\end{aligned}$$

8.2 Singularitatea solutiei si posibilitatea vortexului monopolar singular

Revenind la dezvoltarea in serie si analogia cu solutia ecuatiei Liouville in vecinatatea lui $x \equiv r = 0$, functia de materie ce este regulata peste tot se scrie

$$\rho = ax^2 - \left(\frac{1}{16}\right) a^2 x^6 + \left(\frac{1}{36}\right) a^3 x^8$$

Simplificand, retinem ca la $x \approx 0$, ρ este patratic

$$\rho \approx ax^2$$

Inevitabil celelalte functii derivate din ρ vor avea singularitati. Deoarece intentionam sa continuam interpretarea lor ca functii ce caracterizeaza sistemul fizic, trebuie sa examinam aceste singularitati.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\nabla} \times \left(\widehat{\mathbf{e}}_z \ln \rho\right) \\ &= \widehat{\mathbf{e}}_\theta \left(-\frac{\partial}{\partial r} \ln \rho\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial}{\partial x} (\ln \rho) \qquad (107) \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{ax^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 - O\left(x^6\right)\right) \\ &= -\frac{2}{x} + O\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Ecuatia dedusa din FT nu este direct pentru v_θ ci este pentru $\ln \rho$ si de aici se obtine campul magnetic

$$\begin{aligned} B &= \Delta \ln \rho \\ &= \rho (\rho - 1) \end{aligned}$$

Logica paralelei pe care o intreprindem (fluid fizic - teorie de camp) cere sa identificam campul magnetic $B = F_{12}$ cu vorticitatea fizica

$$\omega \sim B = \rho (\rho - 1)$$

Ecuatia trebuie sa contina si o functie δ provenita din rotationalul potentialului de gauge, deoarece unghiul de faza nu este definit in $r = 0$.

$$\Delta \ln \rho = \rho (\rho - 1) + \delta (\mathbf{x})$$

Deci

$$B = \rho (\rho - 1) + \delta (r)$$

Din relatia viteza-vorticitate

$$\begin{aligned} \omega \widehat{\mathbf{e}}_z &= \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\widehat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)$$

putem constata ca asocierea

$$\psi \ \text{(physics)} = \ln \rho \ \text{(FT)}$$

este consistenta

$$\omega = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(-\frac{2}{x} + O\left(x^3\right)\right)\right] = O\left(x^2\right) + ...$$

Aproape de $r = 0$, avem in FT

$$\begin{aligned} \omega &= \rho(\rho - 1) + \delta(r) \\ &= ar^2\left(ar^2 - 1\right) + \delta(r) \\ &\approx -ar^2 + \delta(r) \end{aligned}$$

ceea ce este de asteptat.

Conchidem ca avem singularitate in $r = 0$ pentru ψ (care trebuie sa tinda catre $-\infty$) si pentru viteza azimutala (care se comporta ca $1/r$).

Existenta acestei singularitati ridica probleme majore de interpretare, pe care le abordam mai jos.

8.3 Conexiunea dintre sistemele fizice cu scala spatiala intrinseca (e.g. plasma si atmosfera) si formularea FT

Rezumand ceea ce avem pana acum in privinta sistemelor fluide cu scala spatiala intrinseca dscrise prin teorie de camp, vom observa ca nu exista mijloace evidente de a elimina singularitatea.

Sistemul fizic este un fluid ideal ce are o scala intrinseca de interactie intre elementele de vorticitate.

O asemenea situatie este descrisa de un sistem de ecuatii diferentiale pentru un set de vortxuri punctuale ce interactioneaza printr-o functie Kirchhoff - Onsager ce implica functii Bessel modificate de indice zero (K_0) exprimand scala spatiala scurta. Parctic se sugereaza ca modelul de teorie de camp sa prevada un foton masiv deci ca potentialul de auto-interactie al campului de materie sa permita mecanismul Higgs. Acest lucru a fost facut atat pentru sisteme in care am insistat sa reprezentam vortexuri de ambele semne, cat si pentru modelul de fata, unde examinam vortexuri monopolare. Teoria de camp in cazul al doilea are toate calitatile pe care le putem astepta:

1. conduce la stari auto-duale
2. are limita clara pentru energie
3. solutiile au grad topologic si sunt clasificate in familii homotopic distincte, tranzitiile dintre ele fiind interzise in absenta disiparii care permite reconexiunea liniilor de curent

Aceste calitati provin din faptul ca nu a trebuit sa se confrunte cu aspectul non-Abelian: decizia de a investiga doar vortexuri monopolare face ne-necesar sa retinem spinori micsti pentru a reprezenta campurile ϕ si A_μ.

Pe de alta parte avem dificultatea ca exista o singularitate a vitezei azimutale, echivaland in sistemul fizic cu situatia ca fluidul se roteste tot mai intens pe masura ce liniile de curent circulare sunt mai aproape de centru. O asemenea curgere ar avea mai multe consecinte care fac sa nu se poate gasi aceasta configuratie in realitate:

1. forta centrifuga asupra fluidului ar impiedica cresterea fara limita a vitezei azimutale
2. viteza azimutala are forfecare ("shear" determinat de dependenta de r) si sunt posibile instabilitati Kelvin Helmholtz
3. orice perturbatie ce are componenta radiala ar conduce la formarea unei curgeri spiralate si ar distruge imediat geometria bidimensionala: fluidul ar dezvolta o curgere pe directia z.

In afara acestora, exista un alt motiv pentru care singularitatea vitezei azimutale nu poate sa fie gasita in realitate. Sistemele pentru care se gaseste aceasta solutie sunt caracterizate de existenta unei rotatii de baza, cum ar fi giratia Larmor. In aceste sisteme, un gradient al densitatii conduce la un flux diamagnetic. Acest flux se combina cu curgerea azimutala si se induce o modificare a razei Larmor: apare o raza Larmor efectiva. Aceasta este mai mare decat raza Larmor de definitie (putem spune: ne-renormalizata prin prezenta fluxului diamagnetic) iar la limita la care viteza azimutala este egalata de viteza diamagnetica raza Larmor efectiva tinde la infinit si deci sistemul nostru nu mai este unul cu raza scurta de interactie. El se transforma efectiv intr-un sistem cu raza de interactie infinita adica Coulombian. Apar deci caracteristicile fluidului Euler.

Conditia ca acest scenariu sa fie realizat este sa existe densitate variabila in sistem. Pentru aceasta trebuie examinat mai atent sistemul fizic, luand ca prototip plasma in camp magnetic.

Cu toate ca auto-organizarea vorticitatii este un proces care se datoreaza dinamicii bi-dimensionale, trebuie sa ne amintim ca sistemele exista totusi in $3D$.

In cazul plasmei in camp magnetic giratia Larmor de baza introduce raza Larmor ρ_s ca scala efectiva de interactie intre doua elemente de vorticitate ale curgerii. **Hasegawa Mima** reamintesc ca exista compresibilitate a fluidului electronic in $2D$: exista o miscare a electronilor de-a lungul campului magnetic si aceasta este foarte rapida datorita masei lor foarte mici. Modelul fizic este deci *cuasi-three-dimensional*, deoarece miscarea paralela a electronilor introduce o compresibilitate efectiva in $2D$. Aceasta observatie releva abilitatea populatiei de electroni de a reactiona la o perturbatie de potential electric prin adoptarea distributiei Boltzmann. Desigur, densitatea ionilor trebuie sa adopte aceeasi distributie pentru a pastra neutralitatea. Aceasta se exprima astfel

$$\frac{n}{n_0} \approx \frac{e\varphi}{T}$$

in care n este perturbatia densitatii produsa de o un potential electric, $n_0(\mathbf{x})$ este densitatea la echilibru, T este temperatura electronilor. $n \ll n_0$. Prima consecinta a faptului ca electronii si ionii au distributie Boltzmann este ca se anuleaza identic convectia de tip $(E \times B)$ a densitatii perturbate

$$(\mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\nabla}) n = [(-\boldsymbol{\nabla}\varphi \times \widehat{\mathbf{e}}_z) \cdot \boldsymbol{\nabla}] n = 0$$

Singura contributie la divergenta fluxului de densitate vine de la driftul de polarizare ionica. Acesta conduce la convectia $2D$ a vorticitatii $2D$, adica acea neliniaritate ce apare si la fluidul Euler.

O discutie similara se poate face pentru atmosfera planetara descrisa in $2D$.

Viteza diamagnetica, explicata mai sus, nu realizeaza un transport efectiv de masa ci se manifesta ca un flux transversal pe un plan ce este orientat de-a lungul gradientului local de densitate. Fluxul diamagnetic v_{dia} impreuna cu viteza deplasarii fizice a fluidului u modifica raza Larmor introducand o raza "efectiva"

$$\frac{1}{\left(\rho_s^{eff}\right)^2} = \frac{1}{\rho_s^2}\left(1 - \frac{v_{dia}}{u}\right)$$

Viteza diamagnetica este determinata de gradientul densitatii la echilibru. Acest efect nu este inclus ion ecuatia Hasegawa Mima. Noi nu putem sa implementam intr-un model de teorie de camp simultan efectul auto-organizarii vorticitatii si evolutia densitatii, de la care s-ar astepta definirea razei Larmor efective. Va trebui sa examinam separat aceste elemente ale tabloului fizic.

Viteza driftului de polarizare ionica se obtine intr-o tratare fluid din conservarea impulsului ionic, cautand aceasta viteza in termenul fortei Lorentz $|e| n_i (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Aceasta forte produce o modificare *Lagrangiana* (*i.e.* adica pe traiectorie) a impulsului ionic.

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \sim |e| n_i \left(\mathbf{v}_i^{pol} \times \mathbf{B}\right)$$

Deoarece impulsul ionic principal este legat de viteza electrica $E \times B$, avem de fapt o iteratie in ecuatia de conservare a momentului.

Viteza driftului de polaizare ionica este introdusa in expresia fluxului din ecuatia de continuitate (conservarea densitatii) si aici se manifesta trasatura ei fundamentala: are divergenta nenula, este de fapt convectia electrica a vorticitatii.

Cum se reflecta acest lucru in teoria de camp?

- termenul Chern-Simons, asa cum s-a explicat, exprima miscarea $E \times B$;
- derivatele covariante $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ reprezinta advectia functiei de materie ϕ care din care se deduce ρ, si mai departe vorticitatea $\omega = \Delta \ln \rho$.
- termenul de auto-interactie a materiei introduce starile de echilibru cele ai joase ale sistemului, adica vidurile, ce vor determina calculul vorticitatii.

Functia de materie ρ isi releva in acest context o posibila interpretare pe care o putem gasi convenabila in cazul plasmei $2D$:

$$\rho = \exp(\psi)$$

este analog unui factor Boltzmann pentru distributia ionilor in potentialul electric ψ. Se indica astfel gradul de accesibilitate a unei stari caracterizate de potentialul ψ care este functia de curent. Poate oare aceasta interpretare sa dea un sens fizic mecanismului Higgs prin care se genereaza interactia de scala scurta intre oicare elemente de vorticitate? Esentialmente, derivatele covariante din termenul cinetic se apropie foarte mult, la distante mari de zona efectiva a curgerii, de o expresie simplificata, in care partea de masa ia valoarea vidului, ceea ce insemna $|\phi|^2 = v^2$ sau $\rho = 1$. Deci "factorul Boltzmann" devine constant. Aceasta se manifesta ca o polarizare in orice variatie a campului de gauge. Acest gen de polarizare nu are un substrat fizic transparent dar indica o dificultate (de tip inertial) in propagarea perturbatiilor campului de gauge. Aceasta se manifesta ca o masa pentru foton, echivalent, ca o raza finita (scurta) de interactie intre doua elemente de materie (adica de vorticitate).

9 Posibila variatie a densitatii in zona singularitatii vortexului

Caracteristica solutiilor pe care le da aceasta ecuatie este distributia vorticitatii pe o zona inelara in jurul centrului. In centru si la distante mari data de centru, vorticitatea este zero. Exista formal doua posibiliati ca vorticitatea sa fie zeroin descrierea FT $F_{12} = B = 0$.

- la raza r mare, avem $\rho = \text{const}$. Atunci $F_{12} = \rho(\rho - 1)$ devine zero.
- la raza foarte mica, aproape de $r = 0$ unde $\rho \sim r^2 + ...$ In aceasta regiune raza Larmor efectiva poate deveni infinit de mare datorita diamagnetismului
$$\frac{1}{\left(\rho_s^{eff}\right)^2} \to 0$$
Problema este complicata de faptul ca avem doua campuri: de vorticitate (F_{12} si $\Delta \ln \rho$) si de densitate $n(\mathbf{r})$.

Deducem viteza azimutala din

$$\begin{aligned}
\rho &\sim \alpha r^2 \\
\psi &= \ln \rho = 2 \ln r + \ln \alpha \\
v &= \left(-\nabla \psi \times \widehat{\mathbf{e}}_z\right)_\theta \\
&= \left(-\frac{d\psi}{dr}\right) \left(\widehat{\mathbf{e}}_r \times \widehat{\mathbf{e}}_z\right)_\theta = -\frac{2}{r} \\
&= -c_s \frac{2}{(r/\rho_s)}
\end{aligned}$$

iar viteza diamagnetica din

$$\begin{aligned}
v_{dia} &= \left(\widehat{\mathbf{e}}_z \times \frac{T}{eB} \nabla \ln n_0\right)_\theta \\
&= \left(\frac{T}{eB} \frac{d}{dr} \ln n_0\right) \left(\widehat{\mathbf{e}}_z \times \widehat{\mathbf{e}}_r\right)_\theta \\
&= \left(\frac{c_s^2}{\Omega_{ci}} \frac{d}{dr} \ln n_0\right) (-1) \\
&= -c_s \frac{d}{d\left(r/\rho_s\right)} \ln n_0
\end{aligned}$$

Din egalitatea aproximativa a vitezelor avem

$$\begin{aligned}
v_{dia} &= v \\
-c_s \frac{d}{d\left(r/\rho_s\right)} \ln n_0 &= -c_s \frac{2}{(r/\rho_s)}
\end{aligned}$$

si dupa scalare

$$\frac{d}{dr} \ln n_0 = \frac{2}{r}$$

$$\begin{aligned}
\ln \frac{n_0(r)}{n_0(\varepsilon)} &= \left[2 \ln r + \ln \gamma\right]_\varepsilon^r \\
&= 2 \ln r - 2 \ln \varepsilon \\
&= \ln \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2
\end{aligned}$$

$$n_0(r) = n_0(\varepsilon) \times \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2$$

ceea ce inseamna

$$n_0(\varepsilon) = \mu \varepsilon^2$$

sau

$$n_0(r) = \mu r^2 + ...$$

Rezulta ca am avea nevoie ca densitatea sa fie rarefiata in zona $r \sim 0$ in aceeasi masura ca ρ

$$\rho(r) \sim n_0(r) \sim \mu r^2 + ...$$

adica plasma are densitate zero in centru. Pe de alta parte energia totala nu mai este infinita, chiar cu profilul vitezei azimutale care este singular

$$v \sim \frac{1}{r} + ...$$

Acum avem densitatea

$$n \sim \mu r^2 + ...$$

iar energia, pe orice interval pe care aceste aproximatii sunt acceptabile (dar care contine singularitatea) este

$$\int_{r=0}^{r=a} d^2r \left(n \frac{1}{2} v^2 \right) = \int_0^a 2\pi r dr \left(\mu r^2 \times \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \sim const$$

Dincolo de limita luata arbitrar $r = a$ avem:

- viteza are descrestere radiala la zero $v = 0$,
- densitatea atinge valoarea de echilibru n_0 =const.

Ne intrebam care este procesul fizic care face ca densitatea sa aiba o asemenea variatie. Desigur, aceasta distributie este bine-venita deoarece face finita energia totala, eliminand efectul cel mai rau al singularitatii.

In termeni de forte, forta centrifugala actioneaza exact pentru a dispersa masa de plasma din zona singularitatii, o valoare infinit de mare a vitezei azimutale neputand sa fie tolerata. Forta cerntrifugala ar fi ea insasi singulara si ar deveni capabila sa expulzeze materia din ziona $r = 0$, catre r mai mare. Luand unitatea de masa egala cu 1,

$$f = n \frac{v^2}{r} \approx \mu r^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \times \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}$$

deci forta centrifuga este singulara $f \to \infty$ pentru $r \to 0$.

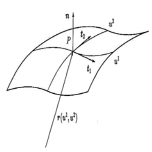
Exista desigur si motivul legat de efectul fluxului diamagnetic asupra razei Larmor efective.

In zona vecina singularitatii $\rho_s^{eff} \to \infty$ si raza scurta a interactiei devine o raza oricat de lunga, la limita infinita deci sistemul devine cu interactie Coulombiana. La aceasta limita fluidul (plasma) devine foarte asemanator cu fluidul Euler. rezulta decuplarea dintre densitatea n si vorticitate ω iar teorema Ertel nu mai este valabila. O raza Larmor efectiva inseamna ca campul magnetic extern este foarte slab sau ca rotatia planetara este foarte lenta. Fluidul are o dinamica asemanatoare cu aceea a unui fluid Euler fara rotatie.

Part III

Configuratii inalt organizate ale fluidului Euler si suprefetele de curbura media constanta in $\mathbf{E}^3$

10 Suprafetele de curbura medie constanta din $\mathbf{E}^3$ verifica aceeasi ecuatie ca starile auto-duale ale fluidului Euler: nu este o coincidenta



Punctele suprafetei $\mathcal{F}$ sunt descrise de vectorul F cu componente $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$, $F_i(x, y) = F_i(z, \overline{z})$ unde $z = x + iy$. Metrica Ω este definita astfel

$$\Omega = 4\rho(x, y)\left(dx^2 + dy^2\right) = 4\exp(\psi)\, dz d\overline{z}$$

Vectorii $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$ si $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \overline{z}}$ sunt tangenti la suprafata. Cu acesti vectori se defineste *normala* la suprafata

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \overline{z}}}{\left|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \overline{z}}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \overline{z}} \cdot \mathbf{N} = 0$$

Se defineste trripletul de vectori

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \overline{z}} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

iar deplasarea de-a lungul directiilor independente date de z si $\overline{z}$ pe suprafata, a triedrului de vectori σ induce modificari date de urmatorul sistem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \mathcal{U}\sigma \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \overline{z}} &= \mathcal{V}\sigma \end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & Q \\ 0 & 0 & B \\ -\frac{\exp(-\psi)}{2} B & -\frac{\exp(-\psi)}{2} Q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} & \overline{Q} \\ -\frac{\exp(-\psi)}{2} \overline{Q} & -\frac{\exp(-\psi)}{2} B & 0 \end{pmatrix}$$

Noile variabile sunt definite prin

$$Q = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z \partial z} \cdot \mathbf{N} \quad B = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z \partial \overline{z}} \cdot \mathbf{N}$$

Prima forma cuadratica a suprafetei este

$$I \equiv d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{F} = [4 \exp(u)]\, dx^2 + [4 \exp(u)]\, dy^2$$

iar a doua forma diferentiala a suprafetei este

$$II \equiv -d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{N} = Q dz dz + 2B dz d\overline{z} + \overline{Q} d\overline{z} d\overline{z}$$

Este acum posibil sa introducem *curburile principale* κ_1 si κ_2 care sunt eigenvalori ale operatorului II relativ la primul operator I.

Trecand peste unele detalii, vom considera ca dispunem de curburile principale si deci vom defini:

Curbura medie:

$$H \equiv \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[(II) (I)^{-1} \right] = \frac{1}{2} B \exp(-u)$$

Curbura Gaussiana:

$$K \equiv \kappa_1 \kappa_2 = \det \left[(II) (I)^{-1} \right] = \frac{1}{4} \left(B^2 - Q \overline{Q} \right) \exp(-2u)$$

Deplasarea triedrului σ pe suprafata se poate exprima prin setul de ecuatii mentionat mai sus. Conditia de compatibilitate, numita **Gauss Petersen Codazzi**, se exprima

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{1}{2} B^2 \exp(-\psi) - \frac{1}{2} Q \overline{Q} \exp(-\psi) = 0$$

Suprafetele avand curbura medie constanta se definesc $H =$const. Luand $H = \frac{1}{2}$,$B = \exp(\psi)$.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{1}{2} \exp(\psi) - \frac{1}{2} Q \overline{Q} \exp(-\psi) = 0$$

iar valoarea absoluta a functiei olomorfe Q se ia egala cu 1. Se obtine din conditia de compatibilitate

$$\Delta \psi + 4 \sinh(\psi) = 0$$

Deducem ca *orice configuratie de curgere asimptotic stationara (inalt organizata, avand proprietatea de auto-dualitate si verificand ecuatia sinh-Poisson) se afla in corespondenta cu o suprafata de curbura medie constanta.* Si reciproc.

Metrica conforma se scrie astfel

$$ds^2 = 4\exp(\psi)\left(dx^2 + dy^2\right)$$

si din aceasta ni se sugereaza anumite asocieri. Din ecuatiile

$$(\kappa_1 - \kappa_2)^2 = Q\overline{Q}\exp(-2\psi)$$

$$\Delta\psi + 4\sinh(\psi) = 0$$

obtinem o posibila corespondenta

$$\begin{aligned} \kappa_1 - \kappa_2 &= \exp(-\psi) \\ \kappa_1 + \kappa_2 &= 2H = 1 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1 + \exp(-\psi)}{2} \\ \kappa_2 &= \frac{1 - \exp(-\psi)}{2} \end{aligned}$$

Identificarea

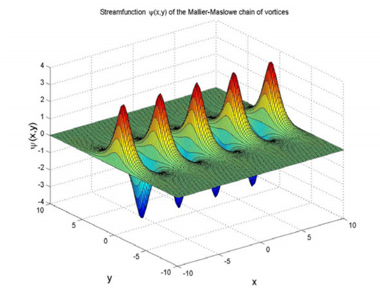
$$\begin{aligned} \rho_2 &\rightarrow \kappa_1 - \kappa_2 \\ \rho_1 &\rightarrow \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{\kappa_1 - \kappa_2} = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad \text{at SD} \end{aligned}$$

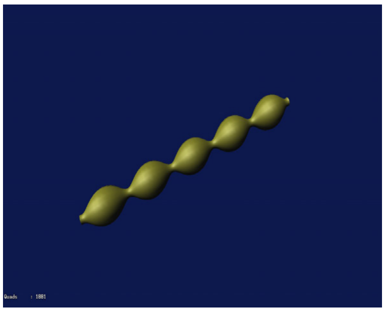
si respectiv

$$\omega = -\frac{2}{\kappa}(\rho_1 - \rho_2) \quad \text{at SD}$$

ne permit sa facem o comparatie

Fluid	$\leftrightarrow$	Delaunay surfaces
asymptotic flow sinh-Poisson		CMC sinh-Poisson
extremum of entropy at constant E_{total} and ω_{total}		minimum area for constant volume
ψ as label of the streamlines		$\rho = \exp(\psi)$ length in the tangent plane
streamline (closed)		$v \in [0, 2\pi)$ circle of invariance





Corresponcence between solution of the Euler fluid equation (Mallier-Maslowe vortex chain) and Constant Mean Curvature surface (unduloid Delaunay).

10.1 Realizabilitatea unor configuratii stationare ale fluidului Euler $2D$ corelat cu restrictii asupra suprafetelor de curbura medie constanta (CMC)

Daca pentru starile asimptotice ale fluidului Euler stim ca sunt solutii ale ecuatiei integrabile *sinh*-Poisson dar nu avem o ideie calara asupra posibilitatii efective de a vedea acele configuratii in realitate, despre suprafetele de curbura medie constanta se stiu lucruri ce deriva din cateva teoreme foarte restrictive.

Ne intereseaza eventualitatea de a putea caracteriza realizabilitatea structurilor de curgere $2D$ Euler pe baza asocierii cu suprafete CMC.

Iata schema corelatiilor

$$\begin{array}{c}
\text{Solutions } \psi\left(x,y\right) \text{ of the sinh-Poisson eq. } \Delta\psi+\sinh\psi=0\rightarrow \\
\rightarrow \text{CMC surfaces } \mathbf{F} \text{ corresponding to the function } \psi\left(x,y\right)\rightarrow \\
\rightarrow\text{surfaces } \mathbf{F} \text{ are } \left\{ \begin{array}{c} \text{embedded (sphere)} \\ \text{immersed} = \text{self-intersected} \\ \text{immersed periodic, with edges} \end{array} \right. \\
\rightarrow\text{flows are stable only for periodic or doubly periodic surfaces}
\end{array}$$

Din aceasta schema deducem ca o suprafata CMC este fara intersectii si deci este de asteptat ca forma curgerii stationare sa se realizeze fara restrictii. Acestea ar fi de exemplu *unduloizii Delaunay*.

daca in schimb suprafata are self-intersectii, este posibil ca fluidul sa nu poata lua configuratia de curgere asociata. Ori, daca totusi este initializat in acea stare, nu va avea stabilitate.

O prima concluzie: un vortex unic, monopolar (cu un singur semn de vorticitate) si definit in tot planul (deci nu pe un patrat fundamental repetat prin dubla periodicitate) NU este o solutie stabila.

10.2 Fuziunea de vortexuri de acelasi semn de scale mici: este o intalnire random sau este o atractie efectiva?

Aratam anterior ca daca doi coeficienti (ai termenului Chern-Simons si respectiv al potentialului de auto-interactie a campului de materie) nu sunt egali exista interactie intre vortexuri mesoscopice si ca poate exista in particular atractie. Ne intrebam ce ne poate oferi corespondenta dintre curgeri stationare auto-duale si suprafete de curbura medie constanta.

10.2.1 Netezirea suprafetei ("surface smoothing") este echivalent cu fuziunea de vortexuri mesoscopice

Procesul prin care o suprafata se apropie de conditia CMC are o reprezentare fizica: este vorba de suprafete elastice de fluid sub actiunea capilaritatii (spuma). Elemente distincte initial se pot fuziona intr-o singura geometrie me-fragmentata. Acest proces este echivalent cu fuziunea vortexurilor in fluidul Euler.

Este un proces disipativ atat pentru filme subtiri capilare cat si pentru fluid, in care trebuie sa existe disipare pentru a avea reconexiune.

- Legatura dintre

  1.capillarity-induced surface smoothing

  2.vortex mergings in relaxation

- Netezirea unei suprafete prin actiunea capilaritatii este pusa in corespondenta cu coalescenta (fuziunea) vortexurilor.

- o clasa de fenomene ce se poate mai usor identifica la suprafete: fuziunea de perturbatii cuasi-umbilicare de tip *saddle* (in care cele doua raze principale de curbura sunt aproape egale dar sunt de semn opus) corespund cu fuziunea vortexurilor de semn negativ; fenomenul se poate manifesta la perturbarea partii de *gatuire* ("neck") ale unuiunduloid perturbat ce evolueaza catre starea de CMC

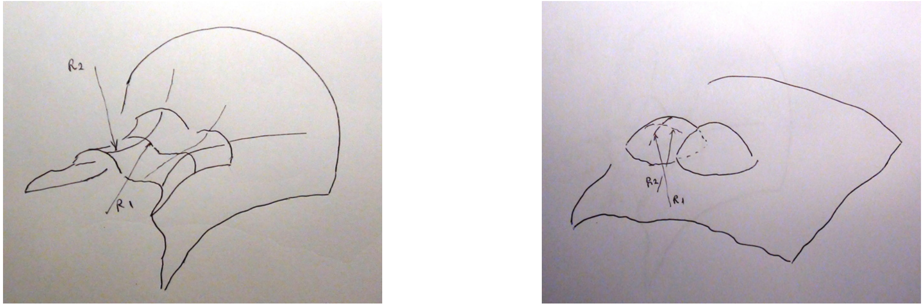
- fuziunea unor pretuberante pozitive ce au un caracter de cuasi-umbilic dar cu razele principale de curbura aproape egale si avand acelasi semn: aceasta corespunde fuziunii a doua vortexuri pozitive.

- fuziune de puncte de tip *saddle* cu perturbatii cuasiumbilicare pozitive pus si simplu nu poate avea loc: fuziunea de vortexuri pozitive si negative NU este observata in fluid. Motivul este repulsia dintre vortexuri de semn opus.

Vom incerca sa traducem o proprietate importanta a modelului FT dar dedusa si de abordarea statistica: $\rho_1\rho_2 = 1$ sau, $N_i^+ N_i^- = 1$, adica intr-un punct nu este posibil sa existe doar vortexuri elementare de un singur semn: sunt necesare si cele de semn contrar.

In teoria suprafetelor avem urmatoarea interpretare.

Sa presupunem ca o specie de vortexuri elementare lipseste complet intr-un punct, de exemplu: $\rho_2 = 0$, ceea ce inseamna $\rho_1 \to \infty$. Singularitatea aceasta este echivalenta, asa cum arata teoria de camp, cu vorticitate infinita. Aceasta vorticitate infinita se asociaza la suprafata CMC cu un punct umbilical.



Simple graphical representation of coalescence of umbilic points: negative respective positive curvature.

Dar, exista teoreme care restrang sever posibiklitatea punctelor umbilicale pe suprafete: o suprafata CMC care nu este sfera NU poate avea puncte umbilicale. rezulta ca acea curgere Euler nu poate avea vorticitate infinita si deci nu se poate ca vreunul dintre cei doi $\rho' s$ sa fie zero.

Part IV
Modelul de fluid Euler si legatura cu modelul Nambu-Jona-Lasinio

11 Mecanismul de generare dinamica a masei in modelul Nambu-Jona-Lasinio

Modelul NJL consta din fermioni fara masa. Se considera totusi ca se poate genera o masa m din efectul interactiei neliniare

$$\begin{aligned} \left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m\right)\psi &= 0 \\ i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m &= 0 \end{aligned}$$

unde m este masa care este *observata*. Se considera energia proprie de auto-interactie a fermionilor Σ

$$i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m_0 + \Sigma\left(p, m, g, \Lambda\right) = 0$$

unde g este constanta de cuplaj (in termenul de auto-interactie) iar Λ este un cut-off. Relatia de masa este

$$m - m_0 = \Sigma\left(p, m, g, \Lambda\right)\big|_{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}+m=0}$$

Constanta de cuplaj g este legata de constanta primara *bare* de cuplaj g_0 prin

$$\frac{g}{g_0} = \Gamma\left(m, g, \Lambda\right)$$

Acum cele doua ecuatii ce leaga constantele fundamentale (m_0, g_0) de constantele observate (m, g) se pot rezolva prin aproximatii succesive. Metoda NJL este legata de de folosirea directa a Lagrangianului: $L = L_0 + L_i =$ (liber) + (interactie). Se introduce formal un termen in Lagrangian L_s care va reprezenta energia proprie

$$L = (L_0 + L_s) + (L_i - L_s) \equiv L_0' + L_i'$$

in ideia de a lua pentru L_s o forma biliniara in variabilele de camp, incat noul L_0' sa conduca la ecuatii de camp liniare. Aceste ecuatii definesc un vid si un set de cuasi-particule, fiecare particula fiind o stare proprie a lui L_0'. Apoi se trateaza L_i' ca o perturbatie, conditionand ca L_i' sa nu mai produca termeni de energie proprie. Aceasta va determina forma Lagrangianului L_s. Se adopta $L_s = -m\overline{\psi}\psi$ si se introduce propagatorul Dirac, $S_F^{(m)}(x)$. Din termenul de auto-interactie L_i care are doua expresii echivalente obtinute prin transformarea Fierz se obtine

$$\begin{aligned}\Sigma &= 2g_0\left[\mathrm{tr}S_F^{(m)}(0) - \gamma^5\mathrm{tr}S_F^{(0)}(0)\gamma^5\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\gamma^\mu\mathrm{tr}\gamma_\mu S_F^{(m)}(0) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^5\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma^5 S_F^{(m)}(0)\right]\end{aligned}$$

Expresia fiind cuadratic divergenta trebuie sa se introduca un cut-off: $F(p, \Lambda) =$ cutoff factor

$$\Sigma = 2g_0\left(-\frac{4i}{(2\pi)^4}\right)\int d^4p \frac{m}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}F(p, \Lambda)$$

Acum, luand masa *primara* in ecuatia $m - m_0 = \Sigma$ egala cu zero, $m_0 = 0$ se obtine pentru masa observabila m,

$$m = -\frac{g_0 m i}{2\pi^4}\int \frac{d^4p}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}F(p, \Lambda)$$

Cu doua solutii

$$\begin{aligned} m &= 0 \text{ sau}\\ 1 &= -\frac{g_0 i}{2\pi^4}\int \frac{d^4p}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}F(p, \Lambda)\end{aligned}$$

Deoarece modelul NJL este bazat pe o analogie cu teoria supraconductibilitatii BCS, se face observatia ca solutia netriviala corespunde starii supraconductoare iar solutia triviala starii normale. Se demonstreaza prin calcul direct ca vidul netrivial $\Omega^{(m)}$ consta, in termeni de particule de masa zero, dintr-o suprapunere de stari-pereche ("paired"). Fiecare are momentul zero, $\mathbf{p} = 0$ spin = 0 si zero "nucleon number" $N = \int d^3x\overline{\psi}\gamma^4\psi = 0$. Fiecare pereche poarta ± 2 unitati de chiralitate.

12 Acelasi continut il gasim in modelul FT pentru fluidul Euler $2D$

Observam fara efort cuasi-identitate cu elementele ce definesc "vidul" fluidului Euler bi-dimensional in modelul nostru de teorie de camp. Suprapunerea unui vortex si a unui anti-vortex, asa cum sunt descrise in tratarea noastra pentru modelul discret Euler $2D$, este identica ca proprietati cu vidul netrivial din NJL.

Revenind, observam ca in modelul **NJL** se gasesc doua tipuri de particule

1. un fermion masiv pe care il denumesc nucleon si a carui masa M este generata dinamic din auto-interactia neliniara.
2. un *meson* fara masa pseudo-scalar ce cupleaza "nucleonii" (numit *pion*). Este "*bound states*" a nucleonului si anti-nucleonului. Se gaseste in NJL ca aceste particule de masa zero sunt schimbate si poarta interactia dintre nucleoni si anti-nucleoni.

Fermionii cu masa generata dinamic M au o extindere spatiala aproximativa de ordinul $1/M$.

Putem sa gasim o interesanta paralela cu *mesonii* fara masa din modeul NJL, identificati de noi ca fiind suprapunere de vortexuri si anti-vortexuri. Este interesant de examinat sugestia ca de indata ce o pereche vortex-anti-vortex este formata, dinamica exprimata de ecuatiile Kirchhoff-Onsager nu mai afecteaza componentele individuale. Aceasta este de inteles deoarece vorticitatea totala este zero. Dar avem acum si propagare libera in planul fluidului. Aceste perechi, care la Euler folosesc doar pentru a defini vidul cu rupere spontana de simetrie chirala, acum se releva ca purtatori ai interactiei dintre nucleoni.

Part V

Anomalia axiala si concentrarea vorticitatii

13 Stringuri axionice, campul fermionic si campul de gauge cu topologie netriviala

Elementele constitutive ale structurii in care se manifesta anomalia axiala constau din: un camp scalar complex al unui string cosmic φ; un camp fermionic ψ cu sarcina electrica q ce are solutii de zero energie dar de chiralitate netriviala de-a lungul stringului cosmic; un camp de gauge A_μ. Aceasta este structura minimala, exista in dimensiune 4 si este compusa din elemente familiare. Totusi din interactia lor poate sa apara neconservarea curentului de sarcina (impus de campul de gauge) si neconservarea tensorului energie impuls: pe string par a se acumula sarcini si energie-impuls ce se nasc "*ex nihilo*" (Naculich, Callen Harvey). Calculand curentul axial al modurilor zero de-a lungul stringului, se gaseste ca divergenta sa nu este zero. Ea este determinata de o cantitate legata de campul de gauge, gradul topologic asociat configuratiei de camp de gauge.

$$\partial \cdot J^5 = q^2 \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\right)$$

Explicatia este ca din interactie se produc curenti ce se dirijeaza simetric radial spre string.

Interactia dintre campul scalar complex al stringului cosmic $\varphi = f\left(x^\mu\right) \exp\left[i\theta\left(x^\mu\right)\right]$ (faza $\theta\left(x^\mu\right)$ este campul axionic) si campul fermionic este $L = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/\right)\psi - \overline{\psi} f\left(x^\mu\right) e^{i\gamma^5\theta}\psi$. Actiunea modurilor chirale ale campului fermionic fara masa *de-a lungul stringului* in interactie cu campul de gauge A_μ este $S = \int d^2x\, \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - qA\!\!\!/\right)\left(\frac{1-\overline{\gamma}}{2}\right)\psi$. Calculand curentul fermionic se gaseste $D^i J_i = -q\frac{1}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j$ unde $i, j = 0, 1$ (sunt de-a lungul stringului deci au o dimensiune spatiala si una temporala). [Notam deja o structura cunoscuta: divergenta covarianta a curentului pe string $D^i J_i$ este nenula din cauza unei surse de tip qB, adica gyratie in camp magnetic $\Omega_{ci} = |q|\, B/m$. Deducem ca advectia curentului J_i nu este un transport paralel: factori de rotatie in plan transversal, gyratie, conduc la o accelerare a curentului de-a lungul filamentului]. Campul electric $F^{03} = E$ genereaza o divergenta nenula $\partial^i J_i = q\frac{E}{4\pi}$ ceea ce inseamna acumulare de sarcini pe string cu o rata

$$q^2 \frac{E}{4\pi} \tag{108}$$

(pe unitate de lungime pe string si pe unitate de timp).

Motivul acestei acumulari de sarcina pe string din numai interactia modurilor fermionice chirale fara masa de pe string cu campul de gauge indica faptul ca operam cu o imagine partiala: de fapt interactia dintre campul scalar complex al stringului φ si campul fermionic ψ *nu se poate restrange la numai volumul central ("core") al stringului*. Exista interactie intre φ si ψ si in restul spatiului. Acolo campul scalar al stringului cosmic φ ia practic valoarea de vid, adica constanta. In acest mediu campul fermionic *capata masa* prin actiunea combinata a lui φ si a campului de gauge. Exista deci moduri fermionice *masive* in afara stringului si aceste moduri modifica interactia de pe string, facand-o "efectiva".

Exista un curent fermionic indus

$$\begin{aligned}\left\langle J^\mu(x)\right\rangle &= \int D[\psi]\, D\left[\overline{\psi}\right] \times \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) \\ &\times \exp\left\{ i \int d^4x \left[\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - qA\!\!\!/ - \mu\right)\psi - \overline{\psi}\left(f e^{i\theta(x)\gamma^5} - \mu\right)\psi\right]\right\}\end{aligned}$$

Aici μ este masa fermionilor pe care o capata in afara stringului cauzata de campul scalar f al stringului ce capata asimptotic valoarea $f \approx \mu$ pentru

$r \to \infty$. Expresia curentului fermionic acum se refera la interactia $\varphi - \psi$ in afara stringului, in prezenta unui camp de gauge A_μ si conduce la o diagrama. Rezultatul este, pentru un camp de gauge non-Abelian

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle = \frac{q^2}{8\pi^2}\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^\nu}\right)F^a_{\rho\sigma}$$

unde

$$F^a_{\rho\sigma} = \frac{\partial A^a_\sigma}{\partial x^\rho} - \frac{\partial A^a_\rho}{\partial x^\sigma} - qf^{abc}A^b_\rho A^c_\sigma$$

Cu aceasta expresie a curentului fermionilor $\overline{\psi}$, ψ, interactionad cu campul axionic (pentru ca $f \approx$ const) $f\exp(i\theta)$ si cu campul de gauge A_μ, se compara valoarea curentului *de-a lungul stringului*, al modurilor zero, care a aratat anomalie axiala. Componenta radiala a curentului este

$$J^r = \frac{q}{4\pi^2}\frac{1}{r}E$$

unde $E \equiv F^{03}$ este campul electric de-a lungul stringului. Rata de acumulare de sarcini pe string este

$$\frac{q^2}{2\pi}E \tag{109}$$

Comparatia dintre Eqs.(108) si (109) arata o *discrepanta* cu un factor 2. Curentul electric ce curge inspre string si aduce sarcini pe string $q\,|J^r| = q^2E/\left(4\pi^2 r\right)$ este de doua ori mai mare decat curentul ce curge de-a lungul stringului $\partial^i J_i = qE/(4\pi)$. Comparand ratele de acumulare de sarcini pe string pe unitate de timp pe unitate de lungime rezulta $\left|\Delta Q^{flow}\right|_{\Delta t=1,dz=1} = 2\left|\Delta Q^{string}\right|_{\Delta t=1,dz=1}$. Ceea ce lipseste este calculul corect al actiunii *efective* al fermionilor in campul de gauge

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{q^2}{16\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\left(\partial_\mu\theta\right)\mathrm{tr}\left(A_\nu F_{\rho\lambda} - \frac{1}{3}igA_\nu\left[A_\rho, A_\lambda\right]\right) \\ &= -\frac{q^2}{32\pi^2}\int d^4x\theta\mathrm{tr}\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\right) \end{aligned} \tag{110}$$

Doar folosind aceasta actiune efectiva se obtine anomalia axiala corecta. Aceasta arata ca divergenta curentului fermionic este legata de o cantitate topologica: este integrala invariantului topologic $F\widetilde{F}$ pe spatiu-timp. Esentialmente, curentul este fortat sa se schimbe (are divergenta nenula) din cauza injectiei de helicitate in sistem prin campul de gauge masurata prin intreaga variatie a termenului Chern-Simons.

13.0.2 Concentrarea vorticitatii in plasma in camp magnetic

Este straniu ca avem un tablou fizic foarte asemenator intr-un cadru pur clasic. Este vorba de o plasma in camp magnetic puternic, in care dinamica paralela este foarte rapida iar cea care domina este dinamica in plan transversal. Este o situatie foarte comuna, de exemplu in tokamak. Obiectul de interes este vorticitatea miscarii in plan, dirijata de-a lungul campului. Cresterea vorticitatii ω poate fi atribuita catorva procese. Unul este divergenta nenula a curentului le-a lungul lui z.

Ecuatia pentru vorticitatea ionica

$$\omega\widehat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{\nabla}\times\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{e}}_z\left(\frac{\mathbf{\nabla}^2\phi}{B_0}\right) \tag{111}$$

este

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{\nabla}^2\phi}{B_0\Omega_{ci}}\right) = \frac{1}{en_0}\frac{\partial J_z}{\partial z} + \mu\mathbf{\nabla}^2\left(\frac{\mathbf{\nabla}^2\phi}{B_0\Omega_{ci}}\right) \tag{112}$$

unde μ est viscositatea. Curentul este

$$J_z = J_z^e + J_z^i \tag{113}$$

unde componenta ionica

$$\frac{1}{en_0}\frac{\partial J_z^i}{\partial z} = \begin{cases} \omega_*\left(k_\perp\right)\frac{T_i}{T_e}\frac{e\phi}{T_e} & \text{for} \quad \omega_*\left(k_\perp\right)\sim\frac{v_{thi}}{qR} \\ 0 & \text{for} \quad \omega_*\left(k_\perp\right)>\frac{v_{thi}}{qR} \end{cases} \tag{114}$$

iar cea electronica J_z^e se obtine din ecuatia de continuitate

$$\frac{d}{dt}\left(n_0+\widetilde{n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-\mathbf{\nabla}\phi\times\widehat{\mathbf{n}}}{B_0}\cdot\mathbf{\nabla}\right)\left(n_0+\widetilde{n}\right) = \frac{1}{e}\frac{\partial J_z^e}{\partial z} \tag{115}$$

13.0.3 Paralela intre anomalia axiala si concentrarea vorticitatii

In unele tratari se recunoaste faptul ca *anomalia axiala* este data de o diagrama reductibila la un *tree*, adica fara bucle si deci nu este foarte limpede daca este necesar sa invocam aspectul cuantic: nu avem generare si anihilare de particule virtuale. De fapt diagrama triunghiulara este doar o interactie clasica intre trei campuri clasice: string, fermioni si gauge.

Remarcam anumite corespondente cu modelul de plasma. Un string cosmic corespunde in plasma oricarui filament determinat de o miscare verticala in plan transversal. Este localizat, la fel ca stringul cosmic,deoarece extinderea unei fluctuatii de viteza azimutala este de ordinul razei Larmor ρ_s. Campul fermionic din teoria campului esta una dintre reprezentarile campului fizic al vorticitatii $\omega = \Delta\phi$. Aceasta corespondenta a fost dezvoltata pe larg anterior, la Euler si la plasma/atmosfera. Intr-un Lagrangian fermionic interactionand printr-un camp de gauge, eliminarea (prin integrare in functionala de partitie) a gradelor de libertate fermionice conduce la aparitia termenului Chern Simons. Ori, asa cum am discutat anterior, acesta este reprezentarea elicitatii, iar in plan transversal, se poate asocia vorticitatii fizice. Termenul CS este acela ce sustine miscarea vorticala in plan. Din acest motiv, elementele de vorticitate din plasma, din afara filamentului, sunt advectate catre filament si cresc curentul axial, sau corespondentul sau in plasma, curentul paralel cu filamentul, prin Eq.(112).

Ceea ce este intersant apare cand consideram direct campul de gauge. In plasma acesta este de fapt o alta reprezentare, duala fata de campul de "materie" a vorticitatii. Din nou, termenul ce sustine aceasta interpretare este Chern-Simons, introdus atat la Euler cat si la plasma/atmosfera de la inceput in Lagrangian. In Eq.(110) se afla esenta procesului concentrarii de vorticitate in plasma si respectiv modificarea campului axial θ al stringului de catre elicitatea campului de gauge: vedem ca actiunea efectiva apare din cuplarea termenului Chern-Simons cu campul θ axial. La fel ca la *baryogenesis* modificarea topologiei campului de gauge este elicitate adusa in sistem si preluata de curentul fermionic de pe filament.

Ceea ce exprima ecuatia din plasma

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial z} \sim \frac{d\omega}{dt}$$

este echivalentul anomaliei axiale. In plasma, aceasta divergenta nenula nu este deloc suspecta: exista advectie de vorticitate catre filament si aceasta advectie nu se poate compensa decat cu o crestere a vorticitatii de-a lungul filamentului, iar asta este echivalent cu divergenta nenula a curentului ionic paralel.

Notam existenta si unei alte posibile paralele: in plasma cresterea vorticitatii pe z (string) mai poate fi generata de termenul *baroclinic*, care exista atunci cand gradientul de presiune nu e paralel cu gradientul de densitate (amandoua sunt in planul transversal pe filament). In teoria campului ar trebui sa se considere disparitate intre cele doua reprezentari ale vorticitatii fizice: termenul Chern-Simons si termenul de auto-interactie scalara.

References

References

[1] W.H. Matthaeus, W.T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton, and D. Montgomery. Decaying, two-dimensional, navier-stokes turbulence at very long times. *Physica D*, 51:531–538, 1991.

[2] D. Montgomery, W.H. Matthaeus, W.T. Stribling, D. Martinez, and S. Oughton. Relaxation in two-dimensions and the "sinh-poisson" equation. *Phys. Fluids A*, 4:3–6, 1992.

[3] A.C. Ting, H.H. Chen, and Y.C. Lee. Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: The vortices of the two-dimensional sinh-poisson equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 26(13):37 – 66, 1987.

[4] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse. *Integrability, self - duality and twistor theory.* London Mathematical Society Monographs New Series. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[5] F. Spineanu and M. Vlad. Self-duality of the asymptotic relaxation states of fluids and plasmas. *Phys. Rev. E*, 67:046309–1–4, 2003.

[6] R. Jackiew and So-Y. Pi. Classical and quantal nonrelativistic chern-simons theory. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2969–2979, 1990.

[7] R H Kraichnan and D Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43(5):547–619, 1980.

[8] R. Robert and J. Sommeria. Statistical equilibrium states for two dimensional flows. *J. Fluid Mech*, 229:291, 1991.

[9] R. Robert and J. Sommeria. Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2776–2779, 1992.

[10] Pierre-Henri Chavanis. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and stellar systems. In Thierry Dauxois, Stefano Ruffo, Ennio Arimondo, and Martin Wilkens, editors, *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, volume 602 of *Lecture Notes in Physics*, pages 208–289. Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[11] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento Series 9*, 6(2):279–287, 1949.

[12] S.F. Edwards and J.B. Taylor. Negative temperatures states of two-dimensional plasmas and vortex fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 336:257–271, 1974.

[13] G. Joyce and D.C. Montgomery. Negative temperature states of the two-dimensional guiding-centre plasma. *J. Plasma Phys.*, 10:107–121, 1973.

[14] J.B. Taylor. Filamentation, current profile and transport in a tokamak. *Phys. Fluids B5*, pages 4378–4383, December 1993.

[15] Gerald V. Dunne, R. Jackiw, So-Young Pi, and Carlo A. Trugenberger. Self-dual chern-simons solitons and two-dimensional nonlinear equations. *Phys. Rev. D*, 43:1332–1345, Feb 1991.

[16] G. Dunne. *Self - dual Chern - Simons theories*, volume 36 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[17] F. Spineanu and M. Vlad. A the asymptotic quasi-stationary states of the two-dimensional magnetically confined plasma and of the planetary atmosphere. *arxiv.org*, physics:0501020, 2005.

[18] L. Jacobs and C. Rebbi. Interaction energy of superconducting vortices. *Phys. Rev. B*, 19:4486–4494, 1979.

[19] K. Arthur. Interaction energy of chern-simons vortices. *Phys. Lett. B*, 356:509–515, 1995.

[20] W.G. Fuertes and J.M. Guilarte. Low energy vortex dynamics in Abelian Higgs systems. *arxiv.org*, hep-th:9812103, 1998.

[21] N.S. Manton. Statistical mechanics of vortices. *Nucl. Phys. B*, 400[FS]:624–632, 1993.

[22] B.J. Nauta and A. Arrizabalaga. Asymmetric chern-simons number diffusion from cp-violation. *Nucl. Phys. B*, 635:255–285, 2002.

[23] P. Arnold, D. Son, and L.G. Yaffe. The hot baryon violation rate is $o\left(\alpha_W^5 t^4\right)$. *Phys. Rev. D*, 55:6264–6273, 1997.

[24] R. Jackiw and S.Y. Pi. Finite and infinite symmetries in $2+1$ dimensional field theory. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl)*, 33C:104–113, 1993.

[25] L. Berge, A. de Bouard, and J.C. Saut. Collapse of chern-simons - gauged matter fields. *Phys. Rev. Lett*, 74(20), 1995.

[26] E. Levich. Certain problems in the theory of developed hydrodynamical turbulence. *Physics Reports*, 151(34):129 – 238, 1987.

[27] J.B. Taylor. Negative temperatures in two dimensional vortex motion. *Phys. Letters*, 40A:1–2, 1972.

[28] E.J. Hopfinger and G.J.F. van Heijst. Vortices in rotating fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25:241–289, 1993.

[29] G. M. Corcos and F. S. Sherman. Vorticity concentration and the dynamics of unstable free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 73:241–264, 1 1976.

[30] James C. McWilliams. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 146:21–43, 9 1984.

[31] F. Spineanu and M. Vlad. Stationary vortical flows in two-dimensional plasma and in planetary atmospheres. *Phys. Rev. Lett.*, 94:235003–1–4, 2005.

[32] F. Spineanu and M. Vlad. Relationships between the main parameters of the stationary two-dimensional vortical flows in the planetary atmosphere. *Geophys. Astro. Fluid. Dyn.*, 103:223–244, 2009.

[33] F. Spineanu and M. Vlad. A field theoretical prediction of the tropical cyclone properties . *arxiv.org*, physics:1310.2750, 2013.

Part VI

Investigarea tendintei de organizare din stari turbulente

In cadrul acestei teme se urmareste abordarea structurilor coerente in fluide si plasme dintr-o perspectiva diferita fata de cea descrisa in sectiunile anterioare, in care s-au studiat starile asimptotice stationare si s-a demonstrat ca vorticitatea se organizeaza in stucturi de scala mare. Acest studiu abordeaza problema generarii de structuri cuasi-coerente din stari turbulente ale fluidelor si ale plasmelor. Aceste structuri sunt de scala mica sau intermediara si initiaza evolutia complexe care conduce la structuri coerente de mari dimensiuni ce reprezinta stari asimptotice stationare ale sistemului. Ele au fost identificate in simularile numerice dar, in majoritatea cazurilor, nu au putut fi descrise analitic pornind de la principii fizice fundamentale ci doar prin modele fenomenologice.

Acest sudiu este bazat pe rezultate originale ale grupului de Teoria Plasmei privind statistica particulelor test in campuri de viteze stohastice. In cercetari anterioare acestui contract, am dezvoltat metode semi-analitice (metoda traiectoriilor de decorelare (DTM) [1]) si generalizarea sa [3]) care au permis studiul procesului intrinsec de captura ce apare in cazul turbulentei bidimensionale incompresibile. Am aratat ca aceasta captura de tip vortical determina efecte de memorie, regimuri anomale de transoprt si distributii ne-Gaussiene ale deplasarilor. Traiectoriilole capturate formeaza structuri vorticale cuasi-coerente [3]. Aceste metode s-au dovedit foarte utile si au condus la numeroase studii ale transportului de particule si de energie in plasme confinate magnetic ([1]-[5] si referintele incluse).

Acest proiect propune (a) extinderea studiile de transport bazate pe abordarea de tip particule test la alte domenii si (b) determinarea efectelor capturii traiectoriilor asupra evolutiei turbulentei. Obiectivul b este foarte ambitios deoarece implica dezvoltarea unor metode teoretice care sa poata fi folosite pentru studiul regimurilor puternic neliniare, in conditiile in care metodele existente se pot aplica doar in regimuri slab neliniare ale turbulentei.

In cadrul Obiectivului a, am studiat doua probleme fizice de interes in cercetarile actuale: advectia stohastica a vaporilor in nori convectivi de tip cumulus {Lucrarile 6, 12, 13} si difuzia particulelor incarcate in campul magnetic stohastic din plasma spatiala {Lucrarile 7, 9, 16, 23}.

In cadrul Obiectivului b s-au finalizat cercetari care au dus la un rezultat important {Lucrarile 4, 24} ce consta din demonstrarea efectului decisiv al capturii in evolutia neliniara a turbulentei. Mai precis, am studiat evolutia turbulentei de drift in plasma confinata magnetic. Am arata ca procesele neliniare observate in simularile numerice (cresterea lungimii de corelatie a potentialului – cascada inversa, generarea unor curgeri zonale si atenuarea neliniara a turbulentei) sunt determinate de captura particulelor. Aceasta este prima tratare analitica bazata pe descrierea fizica fundamentala care conduce la rezultate compatibile cu simularile numerice in regimul puternic neliniar. S-au obtinut prime rezultate instudiul fluidelor ideale descrise de modelul vortexurilor punctuale in interactie {Lucrarea 19}.

0.1 Advectia stohastica a vaporilor in nori convectivi de tip cumulus

Pornind de la rezultate ale simularilor numerice ale dezvoltarii norilor convectivi [7], am dezvoltat un model statistic pentru miscarile ce se dezvolta in interiorul norilor cumulus. Scopul acestor studii este determinarea caracteristicilor advectiei vaporilor si ale procesului de diluare prin difuzie turbulenta. Turbulenta care apare in jeturi calde determina cresterea liniara a dimensiunii lor radiale cu distanta pe axa, proces ce nu apare in cazul norilor. Ei au sectiunea proximativ constanta si o diluare mult mai mica decat cea estimata teoretic. Prezenta capturii ar putea explica acest proces.

Am definit un ansamblu statistic de parcele de aer cald. Forta Arhimedica determina aparitia unui gradient de presiune in interiorul si in jurul parcelei care produce acceleratia aerului, deci un camp de viteze. Acesta corespunde unor inele orizontale de vorticitate. Modelul pentru miscarea stohastica a aerului la scale mult mai mici decat dimensiunea norului implica functii de curgere de forma

$$\mathbf{A} = (-f_y,\ f_x,\ \phi)$$

in care functia f determina inele orizontale de vorticitate iar functia ϕ componenta verticala a vorticitatii. In cazul norilor vorticitatea verticala este mult mai mica decat cea orizontala, ea nefiind generata de forta Arhimedica. Campurile $f(x, y, z)$ si $\phi(x, y, z)$ sunt capuri stohastice independente cu distributie Gaussiana si cu corelatii date. Corelatiile sunt aproximate prin functii Gaussiene pentru ca parcelele de aer cald sunt la distante mult mai mari decat dimensiunile lor orizontale. Lungimile de corelatie verticala sunt mai mari decat cele orizontale. La viteza fluctuanta se adauga o componenta medie constanta V_d pentru a descrie ascensiunea parcelelor.

Folosind metoda traiectoriilor de decorelare [1], am aratat ca procesul de captura poate exista in acest camp tridimensional de viteze, dar cu o topologie mult mai complicata decat in cazul bidimensional si cu o pondere mai mica. Un rol esential il are viteza medie verticala care elibereaza o parte din traiectoriile capturate. Aceste traiectorii provin de regula din partea centrala a parcelei, sunt eliberate lateral si apoi capata o viteza verticala negativa.

S-au calculat coeficientii de difuzie dependenti de timp pe directie orizontala si verticala. Acestia sunt egali la timpi mici (unde captura nu a aparut), dar la timpi mai mari decat timpul de zbor apare o diferenta semnificativa care conduce la valori asimptotice mult diferite. Coeficientul de difuzie vertical este mult mai mare decat cel orizontal. Acest efect este in esenta produs de viteza medie de ascensiune care determina largirea functiei de distributie a deplasarilor verticale.

Aceste rezultate arata ca diluarea vaporilor se produce doar pentru o parte a parcelelor, zona traiectoriilor capturate nefiind afectata. Difuzia este minima atunci cand campul de viteze stohastice aste bidimensional, deci transportul vaporilor, pentru caracteristici date ale turbulentei, are eficienta maxima in fronturi atmosferice.

O concluzie mai generala priveste importanta capturii (care este specifica campurilor de viteze bidimensionale cu divergenta nula) in campuri de viteze tridimensionale. Am aratat ca, in anumite conditii, captura traiectoriilor persista si are efecte neliniare importante: regimuri anomale de transport in care dependenta de parametrii campului stohastic e total diferita de cazul quasiliniar ce rezulta din evaluarea clasica bazata pe modelul drumului aleator. Campul tridimensional contine un mecanism intrinsec de decorelare care reduce ponderea particulelor capturate si conduce la cresterea coeficientului de difuzie. Acest mecanism de decorelare este legat de structura tridimensionala a campului de viteze si nu duce la simpla saturare a coeficientului de difuzie dependent de timp ci la aparitia unor maxime secundare in corelatia lagrangiana. Coeficientii de difuzie sunt minimi pentru conditiile in care sistemul este bidimensional.

0.2 Procese de transport ale liniilor magnetice si ale particulelor in plasma spatiala

Transportul stohastic si accelerarea particulelor sunt fenomene ce exista la toate scalele in univers [8]. In particular, campuri magnetice stohastice determina procese complexe cum ar fi propagarea si accelerarea razelor cosmice sau transportul particulelor in plasma spatiala, in vantul solar sau in arcurile din coroana solara. Acest domeniu de cercetare este foarte activ dupa cum arata numarul mare de publicatii din ultimii ani (de exemplu [9]-[17])

Rolul esential este jucat de liniile de camp magnetic care reprezinta o constrangere asupra miscarii particulelor incarcate. Acestea determina complet transportul particulelor in cazul energiilor mici si pentru ciocniri neglijabile cand particulele sunt legate de campul magnetic. Ciocnirile, care fac ca miscarea in lungul liniilor magnetice sa fie difuziva, schimba complet transportul. Alte procese cum ar fi o mica difuzie colizionala perpendicular pe liniile de camp, drifturile intrinsece determinate de curbura liniilor si de gradienti, curgerile plasmei sau raza Larmor finita determina indepartarea particulelor de liniile magnetice si modifica puternic transportul.

Toate aceste procese au fost intens studiate si s-au obtinut rezultate importante in ultimii 20 ani. Exista insa o zona in care studiile au fost doar cele bazate pe simulari numerice. Acestea sunt regimurile neliniare in care apare captura stohastica a particulelor intr-o miscare de rotatie.

In cadrul acestui proiect am initiat o serie de lucrari menite sa determine efectele neliniare produse de captura particulelor in plasmele spatiale. In aceasta etapa s-au obtinut primele rezultate in acest domeniu si s-au identificat o serie de probleme nerezolvate importante care vor fi propuse in cadrul competitiei ERC Advanced Grant in octombrie 2014.

Aceste studii sunt bazate pe metode teoretice dezvoltate de noi: metoda traiectoriilor de decorelare (DTM, [1]) si generalizarea sa [3]. Aceste metode analitice au fost dezvoltate in cadrul studiului turbulentei in plasme confinate magnetic. Ele descriu efectele capturii traiectoriilor.

Am pornit de la nucleul acestor procese reprezentat de difuzia liniilor de camp magnetic. Am studiat cazul unui camp stohastic perpendicular pe un camp dominant precum si un model mai complex ce contine doua campri stohastice statistic independente din cauza originilor fizice independente, model numit 2D+slab. Aceste rezultate au fost publicate intr-o revista importanta (The Astrophysical Journal).

A fost inceput un al doilea studiu privind miscarea particulelor colizionale in campuri magnetice stohastice. Acesta cuprinde, pe langa efectele capturii traiectoriilor, un element important care nu a fost studiat: existenta unui gradient al campului mediu. Acest camp care este pe o scala spatiala mult mai mare decat cea a fluctuatiilor este aproximat in toate studiile intalnite printr-o constanta. Noi aratam ca existenta unui gradient poate produce efecte importante chiar si atunci cand acesta este foarte mic.

0.2.1 Difuzia liniilor de camp magnetic

Scopul acestui studiu este determinarea efectelor capturii asupra difuziei liniilor de camp magnetic in campuri stohastice cu o componenta sau cu doua (modelul numit 2D+slab) precum si in cazul campurilor cuasi-2D in care exista o dependenta de coordonata z in lungul campului mediu.

Modelul 2D+slab a fost propus de Matthaeus et al. ([18], [19]) pentru descrierea vantului solar. El include fluctuatii de tip Alfven $\mathbf{b}^s(z)$ care depind doar de coordonata in lungul campului mediu $\mathbf{B}_0$=$B_0\mathbf{e}_z$ suprapuse pentru un camp turbulent $\mathbf{b}^{2D}(\mathbf{x})$, unde $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ este coordonata in planul perpendicular.

Au fost determinate, pentru prima data intr-un studiu analitic, regimurile neliniare corespunzatoare capturii liniilor magnetice. Aceste regimuri sunt importante pentru ca exista evidente clare ca turbulenta magnetica este caracterizata de numere Kubo mari. Aceasta concluzie a fost obtinuta din simulari numerice MHD si din interpretarea unor masuratori, cum ar fi cele bazate pe rezultatele TRACE care au aratat ca exista structuri filamentare in arcurile din corona solara ([13]).

Difuzia liniilor de camp produsa de o singura componenta $\mathbf{b}^{2D}(\mathbf{x}, z)$ este caracterizata de captura traiectoriilor si de generarea unor insule magnetice stohastice cu axele orientate preponderent in lungul campului mediu. Existenta unei componente suplimentare $\mathbf{b}^s(z)$ fata de campul $\mathbf{b}^{2D}(\mathbf{x}, z)$ are o puternica influenta asupra difuziei perpendiculare datorita faptului ca ea schimba topologia campului total. Am aratat ca poate exista captura in cazul modelului 2D+slab. Insulele magnetice sunt distorsionate dar ele nu sunt distruse in cazul campurilor $\mathbf{b}^s$ mici. Acest camp produce un mecanism complex de decorelare, care conduce in final la un proces difuziv chiar si atunci cand $\lambda_\parallel \to \infty$. Apare insa un regim superdifuziv tranzitoriu care duce la o crestere puternica a coeficientului asimptotic de difuzie. Regimul superdifuziv este produs de un proces neliniar de acumulare de corelatie a vitezei Lagrangiene a lui $\mathbf{b}^{2D}$ determinat de intoarcerea liniei de camp in zona corelata ca efect al contributiei componentei $\mathbf{b}^s$.

Existenta unei mici componente $\mathbf{b}^s(z)$, care are efecte directe neglijabile la difuzia liniilor magnetice, determina o crestere puternica a difuziei prin interactia neliniara cu $\mathbf{b}^{2D}$. Coeficientul de difuzie este in acest regim cu mult mai mare decat coeficientii de difuzie produsi de fiecare din cele doua componente luate separat.

In concluzie, am aratat ca exista diferente esentiale intre transportul in camp magnetic stohastic cu doua componente (in modelul 2D+slab) si cel corespunzator turbulentei magnetice $\mathbf{b}^{2D}(\mathbf{x}, z)$. Nu sunt influentate doar valorile coeficientilor de difuzie dar chiar si dependenta de parametri turbulentei si procesele fizice sunt schimbate. Prezentarea detaliata a acestor rezultate poate fi gasita in articolul atasat (Lucrarea 6).

0.2.2 Transportul particulelor colizionale in plasma spatiala

Transportul particulelor incarcate intr-o plasma magnetizata este un proces triplu-stocastic, traiectoriile fiind determinate de campul magnetic (a carui dependenta spatiala produce o corelatie Lagrangiana neliniara), de o viteza stoastica paralela cu campul magnetic ce descrie ciocnirile paralele (care intervin in ecuatii sub forma unui zgomot multiplicativ) si de o viteza stohastica perpendiculara data de ciocnirile perpendiculare pe directia campului magnetic.

Modelul contine un camp magnetic mediu care are o variatie spatiala. Recent s-a aratat ca aceasta variatie poate produce un flux mediu chiar si atunci cand gradientul corespunzator este cu mult mai mic decat gradientul componentei stohastice [4].

Lucrarea de fata isi propune studiul transportului particulelor incarcate in camp magnetic stohastic, in prezenta ciocnirilor (paralele si perpendiculare pe directia campului mediu) si a unui gradient al campului mediu. Aceste aspecte au mai fost studiate in cazul plasmelor de laborator confinate magnetic, dar separat [3], [4].

Miscarea in aproximatia centrului de ghidare este studiata intr-un camp magnetic $\mathbf{B} = B\left(\mathbf{e}_z + \mathbf{b}(\mathbf{x}, z, t)\right)$, cu o componenta medie ce are un gradient cu o lungime caracteristica R_0 si o componenta stocastica data de functia scalara $\phi(\mathbf{x}, z)$ ca $\mathbf{b}(\mathbf{x}, z, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \phi(\mathbf{x}, z, t)\mathbf{e}_z$.Sistemul de ecuatii pentru centrele de ghidare ale particulelor este

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, z, t)\eta_{\parallel}(t) + \boldsymbol{\eta}_{\perp}(t), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dt} = \eta_{\parallel}(t). \tag{2}$$

Functiile stocastice $\mathbf{b}(\mathbf{x}, z, t)$, $\eta_{\parallel}(t)$ si $\boldsymbol{\eta}_{\perp}(t)$ sunt presupuse stationare, omogene, distribuite Gaussian si independente statistic.

Dificultatea acestei probleme rezida in faptul ca viteza perpendiculara a particulelor incarcate $\mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t) \equiv \mathbf{b}(\mathbf{x}, z, t)\eta_{\parallel}(t)$ este determinata de produsul a doua functii stohastice, care desi sunt independente statistic, devin corelate in sistemul de reprezentare Lagrange datorita dependentei spatiale a fluctuatiei campului magnetic.

Primele rezultate obtinute cu DTM conduc la urmatoarele concluzii preliminare:

- Gradientul campului magnetic determina o viteza medie pe directia sa, in conditiile in care viteza medie Euleriana este nula. Aceasta este similara cu viteza obtinuta in cazul turbulentei electrostatice in plasme de laborator [4], dar cu influente puternice produse de miscarea colizionala in lungul campului magnetic. Viteza medie este rezultatul unui proces neliniar. Ea conduce la concentrarea particulelor pe scala mare a variatiei campului $\mathbf{B}_0$, proces foarte important pentru intelegerea plasmelor spatiale.

- Ciocnirile particulelor influenteaza puternic procesul de transport care devine complex in cazul difuzibilitatii colizionale slabe care nu decoreleaza complet particulele de insulele magnetice stohastice produse de captura liniilor de camp magnetic. Desi conditiile din plasmele spatiale sunt complet diferite de cele din plasmele de laborator [2], regimurile de difuzie sunt asemanatoare. Am aratat ca gradientul campului magnetic si viteza medie pe care o genereaza au o influenta slaba asupra coeficientilor de difuzie.

0.3 Captura stohastică a ionilor şi evoluţia turbulenţei de tip drift

Evoluţia turbulenţei în plasmele confinate magnetic este o problemă complexă, incomplet înţeleasă în ciuda unui volum de muncă imens (vezi [20] şi trimiterile bibliografice incluse). Turbulenţa de tipul driftului de joasă frecvenţă, care are o influenţă semnificativă asupra confinării plasmei, este studiată extensiv în special în contextul cercetărilor de fuziune (v. de ex. [21], [22]). Majoritatea studiilor care merg dincolo de stadiul cuasiliniar se bazează pe simulări numerice sau modele simplificate. Aceste studii arata o evoluţie neliniară complexă, cu cresterea lungimii de corelatie si a gradului de ordine şi apariţia unor moduri de curgere zonală ([23]), care conduc la atenuarea neliniară a turbulenţei. Aceste moduri şi efectele lor asupra atenuării turbulenţei şi asupra îmbunătăţirii confinării constituie în prezent o tematică de cercetare foarte activă.

Scopul lucrării de faţă este de a contribui la înţelegerea efectelor capturii traiectoriilor asupra evoluţiei turbulenţei de tip drift. Acestea sunt primele rezultate analitice ale acestei probleme complexe, aflate în acord cu simulările numerice. A fost pusă la punct o abordare langrangeană care extinde tipurile de metode iniţiate de Dupree [**?**] la regimurile neliniare caracterizate prin captură. Am arătat că există o succesiune de efecte care apar la diferite etape ale evoluţiei, sub forma unor procese tranzitorii, şi că turbulenţa de tip drift are o evoluţie oscilatorie. Principalul rol în aceste procese este jucat de captura stohastică a ionilor.

Undele şi instabilităţile de drift sunt moduri de joasă frecvenţă, generate în plasme neuniforme, confinate magnetic. Instabilitatea universală de drift este analizată în domeniul necolizional, în câmp magnetic constant. Modelul folosit este de tip test-mod în care se ia in considerare o plasmă turbulentă cu caracteristici statistice date ale potenţialului de baza ϕ_b şi o mica perturbaţie de forma unui mod cu amplitudine foarte mica. Potentialul de baza este solutia sistemului la limita razelor Larmor neglijabile si consta din driftul potentialului initial cu viteza diamagnetica V_*. Ratele de creştere $\gamma(\mathbf{k})$ şi frecvenţele $\omega(\mathbf{k})$ modurilor test sunt determinate ca funcţii de caracteristicile statistice ale potenţialul. Modificarea formei şi amplitudinii potenţialului este cauzată de driftul de polarizare pe o scară de timp mai mare, de ordinul $1/\gamma$. Studiile modurilor test ale turbulenţei se bazează pe această separare a scalelor de timp.

S-a determinat relaţia de dispersie pentru modurile test din plasma turbulentă folosind statistica traiectoriilor ionice (care sunt caracteristicele ecuatiei de evolutie a densitatii de ioni). Mai exact s-a determinat propagatorul renormalizat si termenul ce descrie efectul de compresibilitate determinat de driftul de polarizare. Rezultatele arata ca modurile depind puternic de amplitudinea potentialului de baza.

Pentru amplitudini mici in care nu apare captura traiectoriilor ionice, efectul turbulentei de baza consta in atenuarea modurilor datorata difuziei ionilor. Se reproduce rezultatul este bine cunoscut al lui Dupree ([**?**]).

Daca captura este prezenta dar afecteaza un numar mic de ioni $n = n_{tr}/n_f << 1$ (unde n_{tr} este fractia traiectoriilor capturate si n_f este fractia ionilor liberi), rata de crestere arata ca se amplifica modurile cu numere de unda mici. Maximul ratei de crestere se deplaseaza spre numere de unda mici datorita procesului de captura. Turbulenta evolueaza in acest stadiu prin cresterea lenta a amplitudinii potentialului insotita de cresterea lungimii sale de corelatie. Se produce deci cresterea ponderii ionilor capturati.

Atunci cand factorul n nu mai este neglijabil (captura puternica) se produc fluxuri de ioni: ionii capturati se misca cu potentialul de baza iar cei liberi se misca in directie opusa astfel incat fluxul total sa ramana nul. Acesta este starea puternic neliniara a turbulentei de drift. Ratele de creştere obtinute in aceste conditii arata ca modurile cu lungimi de undă mari sunt stabilizate de fluxurile de ioni, în timp ce modurile de undă scurtă sunt încă în creştere. Aceasta conduce la creşterea amplitudinii turbulenţei însoţită de descreşterea lungimii ei de corelare. Ambele efecte contribuie la creşterea valorii lui n.. În consecinţă, creşterea amplitudinii turbulenţei continuă, ca şi descreşterea lungimii de corelaţie. Procesul se opreşte când $n > 1$, deoarece rata de creştere devine negativă pentru întregul interval de numere de undă.

Tot in aceste conditii de turbulenta in stare puternic neliniara, apar moduri instabile complet diferite de modurile de drift: cu $k_y = 0$ şi frecvenţe foarte mici, mult mai mici decât frecvenţa diamagnetică. Acestea sunt modurile de curgere zonală. Aceste moduri instabile de curgere zonală sunt consecinţa capturii combinată cu driftul de polarizare ionica.

Rezulta deci ca in starea puternic neliniara, curgerile ionice produse de captura ionică în potenţialul de baza care se misca cu viteza diamagnetica determină două efecte paralele: amortizarea neliniară a modurilor de drift şi generarea modurilor de curgere zonală. Nu există nicio relaţie de cauzalitate între modurile de curgere zonală şi amortizarea turbulenţei de drift. Ambele efecte sunt generate în mod selfconsistent in cursul evoluţiei neliniare ale turbulenţei de drift. Influenţa exercitată de curgerile zonale asupra modurilor de drift este doar indirectă, prin atenuare difuzivă. Curgerile zonale schimbă configuraţia potenţialului şi, în consecinţă, a corelatiei sale euleriene, ceea ce determină o creştere destul de pronunţată a difuziei pe directia y. Atenuarea modurilor de drift determină descreşterea ratei de crestere a modurilor de curgere prin descreşterea lui n.

Paradigma prădător-pradă [6], care este considerata ca explicatie a saturarii turbulentei de drift, nu este susţinută de aceste rezultate (bazate pe o descriere fundamentala a turbulentei), deşi există o corelaţie în timp între rata de creştere maximă a modurilor de curgere zonală şi amortizarea modurilor de drift. În concluzie, s-a obţinut o interpretare fizică diferită a evoluţiei neliniare a turbulenţei de drift. Principalul rol este jucat de captura ionilor în potenţialul stohastic.

0.4 Captura traiectoriilor in evolutia fluidelor turbulente

Fluidele ideale bidimensionale sunt descrise de ecuatia Euler

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \omega = 0, \tag{3}$$

unde vorticitatea ω si viteza $\mathbf{v}$ sunt sunt determinate de functia de curent ϕ

$$\omega = \Delta\phi \tag{4}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi \times \mathbf{e}_z, \tag{5}$$

si $\mathbf{e}_z$ este versorul perpendicular pe planul miscarii. Problema poate fi reprezentata in functie de o multime de vortexuri punctuale care au vorticitatea $\pm\omega_0$ (modelul Kirchhoff Onsager). Acesta permite determinarea analitica a functiei de curent din Ec. (4) si calculul corelatiei euleriene a potentialului in functie de corelatia vorticitatii.

Avand corelatia potentialului, se poate aplica metoda dezvoltata in [6] pentru studiul evolutiei turbulentei de drift in plasma magnetizata.

Am aratat ca in cazul fluidelor exista intotdeauna captura traiectoriilor, dar cu pondere mica. Aceasta pentru ca evolutia functiei de curent este determinata de evolutia vorticitatii, deci are loc pe aceeasi scala de timp, care este de ordinul timpului de zbor. Aceasta face ca metoda sa fie mai putin precisa decat in cazul plasmei unde exista separare de scale intre timpul de zbor si cel al evolutiei potentialului.

Tendinta de agregare a vorticitatii de acelasi semn pare greu de explicat in acest context bazat pe miscarea vortexurilor punctuale, care este independenta de de semnul vorticitatii elementare. Analizand traiectoriile de decorelare si probabilitatea deplasarilor rezulta ca procesul de agregare este asociat cu existenta unei mici viteze medii locale. Aceasta apare in special intre doua celule mai mari de vorticitate de semne opuse si este datorata scalelor spatiale diferite (scala vitezei este mai mare decat a vorticitatii).

Statistica traiectoriilor pe subansambluri de pozitii initiale care au o viteza medie V_m (mai mica decat amplitudinea vitezei stohastice) arata ca probabilitatea deplasarilor este alungita in lungul vitezei medii. Configuratia echiliniilor functiei de curent este schimbata: o parte din echilinii sunt deschise iar cele inchise sufera un proces de polarizare ce consta in deplasarea perpendiculara a celulelor pozitive spre celula mare pozitiva si a celulelor negative spre celula mare negativa. Celulele de vorticitate pozitiva se alungesc si se pot lipi de marginea celulei pozitive mari (la fel pentru cele negative). Ca urmare dimensiunea celulelor mari creste si se produce un maxim de vorticitate la margine datorita acumularii celulelor din jur (aparitia unor 'foi' de vorticitate).

Rezulta deci ca apare o crestere a lungimii de corelatie a vorticitatii. Acest proces se produce la marginile celulelor de vorticitate atunci cand doua celule de semne opuse se apropie. Procesul este lent pentru ca afecteaza o parte din celulele de dimensiuni mici aflate in conditii speciale.

References

[1] Vlad, M., Spineanu, F., Misguich, J. H., Balescu, R. 1998, Phys. Rev. E, **58**, 7359

[2] Vlad, M., Spineanu, F., Misguich, J. H., Balescu, R. 2003, Phys. Rev. E, 67, 026406

[3] Vlad, M., Spineanu, F. 2004, Phys. Rev. E, 70, 056304

[4] Vlad, M., Spineanu, F., Benkadda, S. 2006, Phys. Rev. Let. 96, 085001

[5] Vlad, M., Spineanu, F. 2013, Phys. Plasmas, 20, 122304

[6] Vlad, M. 2013, Phys. Rev. E 87 053105

[7] R. House, Cloud dynamics, Academic Press, 1993

[8] Shalchi, A. 2009, Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theory (Berlin: Springer)

[9] Shalchi, A., & Tautz, R.C. 2011, Astrophysical J., 735, 92

[10] Spatschek, K. H. 2008, PPCF, 50, 124027

[11] Snodin, P., Ruffolo, D., Matthaeus, W. H. 2013a, Astrophysical J., 762, 66

[12] Snodin, P., Ruffolo, D., Oughton, S., Servidio, S., Matthaeus, W. H. 2013b, Astrophysical J., 779, 56

[13] Aschwanden, M. J., Nightingale, R. W. 2005, Astrophysical J., 633, 499

[14] Beresnyak, A., Yan, H., Lazarian, A. 2011, Astrophysical J., 728, 60

[15] Ghilea, M. C., Ruffolo, D., Chuychai, P., Sonsrettee, W., Seripienlert, A., Matthaeus, W. H. 2011, Astrophysical J., 741, 16

[16] Lazarian, A., Yan, H. 2014, Astrophysical J., 784, 38

[17] Zimbardo, G., Perri, S. 2013, Astrophysical J., 778, 35

[18] Matthaeus, W. H., Goldstein, M. L., Roberts, D. A. 1990, JGeophysical Research, 95, 20673

[19] Matthaeus, W. H., Gray, P. C., Pontius, D. H. Jr., Bieber, J. W. 1995, Phys. Rev. Let, 75, 2136

[20] Krommes J. A., Phys. Reports 360 (2002) 1.

[21] Horton W, Rev. Modern Phys. 71 (1999) 735.

[22] Garbet X, Idomura Y, Villard L, Watanabe T H, Nuclear Fusion 50 (2010) 043002.

[23] Diamond P. H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T. S., Plasma Phys. Control. Fusion 47 (2005) R35-R161.